10 czerwiec 2018

GAL z ★, konspekt wykładów: Endomorfizmy

http://www.mimuw.edu.pl/~aweber/zadania/gal2017gw/

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.
Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Przestrzenie ilorazowe, wektory własne

Przestrzenie ilorazowe [Kostrikin I.2.6]

1.1 Niech $W \subset V$ para podprzestrzeni. Definiujemy relację równoważności w V: $\alpha \sim \beta$ jeśli $\alpha - \beta \in W$. Zbiór klas abstrakcji ma strukturę przestrzeni liniowej. Oznaczenie V/W.

1.2 Odwzorowanie $\pi : V \to V/W$ jest liniowe, jest epimorfizmem, $ker(\pi) = W$.

1.3 Własność uniwersalna ilorazu: dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : V \to Z$ takiego, że $\phi_{|W} = 0$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\overline{\phi}$ takie,że $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd}
 & & V/W \arrow[dd, dotted, "\exists!\overline{\phi}"] \\
W \arrow[r, "\iota"] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "0"'] & V \arrow[ur, "\pi"'] \arrow[dr, "\forall\phi"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Innymi słowy: wszystkie przekształcenia z V zerujące się na W jednoznacznie faktoryzują się przez V/W. Własność jednoznacznej faktoryzacji definiuje V/W z dokładnością do izomorfizmu.

1.4 Własność uniwersalna determinuje iloraz z dokładnością do izomorfizmu. Jeśli odwzorowanie $p : V \to Q$ spełnia warunek: $p \circ \iota = 0$ *oraz dla każdego przekształcenia liniowego* $\phi : V \to Z$ *takiego, że* $\phi_{|W} = 0$ *istnieje dokładnie jedno przekształcenie* $\overline{\phi}$ *takie,że* $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$*:*

$$\begin{tikzcd}
 & & Q \arrow[dd, dotted, "\exists!\overline{\phi}"] \\
W \arrow[r, "\iota"] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "0"'] & V \arrow[ur, "p"'] \arrow[dr, "\forall\phi"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

to $Q \simeq V/W$ oraz ten izomorfizm jest zgodny z przekształceniami $p : V \to Q$ i $\pi : V \to V/W$.

1.5 Gdy $U, W \subset V$, to

$$(U + W)/W \simeq U/(U \cap W).$$

1.6 Niech $\phi : V \to Z$ będzie przekształceniem liniowym. Istnieje naturalne przekształcenie

$$\overline{\phi} : V/ker(\phi) \to Z$$

takie, że $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$. Ponadto $\overline{\phi}$ zadaje izomorfizm $V/ker(\phi) \simeq im(\phi)$.

1.7 Wniosek: Jeśli $V = W \oplus U$ to $V/W \simeq U$.

1.8 Push-out P odwzorowań $V_1 \overset{\phi_1}{\leftarrow} W \overset{\phi_2}{\rightarrow} V_2$ definiujemy poprzez własność uniwersalną

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dd, "\phi_2"'] & V_1 \arrow[dl, "\forall\psi_1"'] \arrow[dd, "\pi_1"] \\
& Z \\
V_2 \arrow[ur, "\forall\psi_2"] \arrow[r, "\pi_2"'] & P \arrow[ul, dotted, "\exists!\psi"']
\end{tikzcd}$$

Dla każdej pary przekształceń $\psi_1 : V_1 \to Z$, $\psi_2 : V_2 \to Z$ takiej, że $\psi_1\phi_1 = \psi_2\phi_2$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\psi : P \to Z$ takie, że $\psi_1 = \psi\pi_1$ i $\psi_2 = \psi\pi_2$.

1.9 Definicja push-outu ma sens w dowolnej kategorii (choć nie zawsze musi istnieć).

1.10 W kategorii przestrzeni wektorowych $P = (V_1 \times V_2)/U$, gdzie $U = \{(\phi_1(w), -\phi_2(w)) \mid w \in W\}$.

1.11 Gdy $V_2 = 0$, to $P = V_1/im(\phi_1)$.

1.12 Ćwiczenie: Niech $U \subset W \subset V$ będą przestrzeniami liniowymi. Wykazać, że

$$(V/U)/(W/U) \simeq V/W\,.$$

1.13 Ćwiczenie: Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym oraz niech $C(A)$ oznacza zbiór funkcji ciągłych na A. Wtedy $C(A) \simeq C(\mathbb{R})/I(A)$, gdzie $I(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) \,|\, \forall x \in A\,, f(x) = 0\}$.

1.14 Jeśli V jest skończonego wymiaru, to $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$. Kowymiar definiujemy jako

$$\mathrm{codim}_V(W) = \dim(V/W).$$

Kowymiar może być skończony, nawet gdy $\dim V = \infty$

2 Endomorfizmy, wektory i przestrzenie własne

Patrz czyli [Kos roz 2] (gdzie endomorfizmy nazywane są operatorami liniowymu [Tor VI])

2.1 Endomorfizmy $End(V) = L(V, V)$. Operacja „+” oraz $\circ$ zadaje strukturę pierścienia (nieprzemiennego) z jedynką. Dodatkowo mamy mnożenie przez skalar z ciała bazowego. Taka struktura nazywa się *algebra nad ciałem* $\mathbb{K}$.

2.2 $End(V)$ nazywana jest także algebrą operatorów liniowych w przestrzeni V. Gdy $\dim V = n$ to $End(V)$ jest izomorficzna z algebrą macierzy $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

2.3 Dla endomorfizmu $\phi \in End(V)$ oraz wielomianu $f \in \mathbb{K}[x]$ definiujemny $f(\phi) \in End(V)$. Podobnie dla macierzy kwadratowej $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ definiujemy $f(A)$. Mamy $f(A)g(A) = (fg)(A) = g(A)f(A)$.

2.4 Wektory własne, wartości własne, przestrzeń własne

$$V_\lambda = \{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = \lambda\phi\} = ker(\phi - \lambda Id_V).$$

2.5 Zbiór wartości własnych przekształcenia ϕ nazywamy spektrum. Oznaczamy $spec(\phi)$.

2.6 Przykład $M(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, wartości własne $\lambda = -1$ i $\lambda = 5$, wektory własne dla $\lambda = -1$: $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, dla $\lambda = 5$: $(1, 1, 1)$.

2.7 Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą V, $A = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Natępujące warunki są równoważne:

- λ jest wartością własną,
- macierz $A - \lambda I$ jest osobliwa.
- $\det(A - \lambda\, I) = 0$.

2.8 Metoda szukania warto?ci w?asnych i wektor? w?asnych:
1. rozwiązujemy równanie charakterystyczne $\det(M(\phi) - \lambda\, I) = 0$
2. rozwiązujemy układ liniowy jednorodny $(\phi - \lambda\, Id)(\alpha) = 0$.

2.9 Wielomian $W_\phi(\lambda) = \det(M(\phi) - \lambda\, I)$ nazywamy wielomianem charakterystycznym lub równaniem charakterystycznym endomorfizmu ϕ.

2.10 Gdy $\dim(V) = 2$, to

$$W_\phi(\lambda) = \lambda^2 - 2\, tr(M(\phi)\lambda + \det(M(\phi))\,,$$

gdzie dla macierzy $A = \{a_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}$ ślad $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Ogólniej,

$$W_\phi(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} tr(M(\phi))\lambda^{n-1} + \ldots ??? \cdots + \det(M(\phi))\,.$$

2.11 Przykład $\phi(x, y) = (x + y, y)$, tu $\dim V_1 = 1 <$ krotność $\lambda = 1$ w $W_\phi(\lambda) = (t - 1)^2$.

2.12 Przykład $\phi(x, y) = (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y, -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)$, $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$,
Jako endomorfizm $\mathbb{R}^2$ nie ma wartości własnych, ale gdy rozpatrujemy jako endomorfizm $\mathbb{C}^2$, to są dwie wartości własne: $spec(\phi_{\mathbb{C}}) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$.

2.13 Jeśli $\phi_{\mathbb{C}} \in End(\mathbb{C}^n)$ jest rozszerzeniem do liczb zepolonych endomorfizmu $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$, oraz λ jest wartością w'lasną z wektorem α, to $\bar{\lambda}$ jest wartością własną z wektorem własnym $\bar{\alpha}$.

2.14 Przykład: wyprowadzenie wzoru na liczby Fibonacciego. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$. Jeśli przyjąć $\phi \in End(\mathbb{R}^2)$, $\phi(x, y) = (y, x + y)$, to

$$\phi(F_{n-1}, F_n) = (F_n, F_{n+1}).$$

Zatem

$$(F_n, F_{n+1}) = \phi^n(F_0, F_1) = \phi^n(0, 1)\,.$$

Przekształcenie ϕ ma wartości własne:
$\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, wektor własny $\alpha_+ = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$,
$\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, wektor własny $\alpha_- = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$.
Oraz $(0,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_+ - \alpha_-)$.
Stąd $(F_n, F_{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\alpha_+ - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\alpha_-\right)$. Biorąc pierwszą współrzędną dostajemy ogólnie znany wzór na liczby Fibonacciego.

Przestrzenie nieskończenie wymiarowe:

2.15 Przykład: jakie są wektory własne przekształcenia $\phi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi(f) = f'$?
(Odp: $spec(\phi) = \mathbb{R}$, $V_\lambda = \mathrm{lin}\{e^{\lambda x}\}$.)

2.16 Przykład: Funkcje gładkie i periodyczne o okresie 2π utożsamiamy z funkcjami na okręgu $C^\infty(S^1)$. Jakie są wektory własne przekształcenia $\phi : C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1)$, $\phi(f) = f''$?
(Odp $spec(\phi) = \{-k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$, $V_{-k^2} = \mathrm{lin}\{\cos(kx), \sin(kx)\}$.)

2.17 Ćwiczenie z analizy: Niech $V = C^\infty(\mathbb{R})$,
a) $\phi(f) = \big((t^2-1)f'(t)\big)'$. Sprawdzić, że wielomian Legendra $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left((t^2-1)^n\right)$ jest wektorem własnym z wartością własną $n(n+1)$. (Symbol $\frac{d^n}{dt^n}$ oznacza operacją brania n-tej pochodnej.)
b) $\phi(f) = t\,f' - (1-t^2)f''$. Sprawdzić, że wielomian Czebyszewa T_n jest wektorem własnym z wartością własną n^2. (Wielomian Czebyszewa spełnia $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$.)

3 Przestrzenie niezmiennicze, Tw Cayleya-Hamiltona

3.1 Wielomian charakterystyczny $W_\phi(\lambda) = \det(M(\phi - \lambda\, Id))$ nie zależy od wyboru bazy.

3.2 Jeśli wektory α_i dla $i = 1, \ldots, k$ są własne dla różnych wartości własnych, to są liniowo niezależne.

3.3 Mówimy, że endomorphizm $\phi \in End(V)$ jest diagonalizowalny, jeśli w pewnej bazie V macierz ϕ jest diagonalna.

3.4 Jeśli $W_\phi(t)$ rozkłada się na różne czynniki liniowe, to isnieje baza złożona z wektorów własnych. W tej bazie $M(\phi)$ jest diagonalna.

3.5 Kryterium diagonalizowalności: ϕ jest diagoanalizowalny wtedy i tylko wtedy gdy:
1) $W_\phi(t)$ rozkłada się na czynniki linowe w K
2) krotność λ w W_ϕ jest równa $\dim(V_\lambda)$

3.6 Mówimy, że podprzestrzeń $U \subset V$ jest niezmiennicza, gdy $\phi(U) \subset U$.

3.7 Przekształcenie ϕ zadaje

$$\phi_{|U} : U \to U\,, \qquad \text{i} \qquad \bar{\phi} : V/U \to V/U.$$

3.8 Jeśli istnieje podprzestrzeń niezmiennicza wymiaru k, istnieje baza $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V taka, że $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U. Wtedy $[\alpha_{k+1}], [\alpha_{k+2}], \ldots, [\alpha_n]$ jest bazą V/U. Przekształcenie ϕ w tej bazie ma macierz blokową gżnotrójkątną $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, gdzie A jest macierzą $\phi_{|U}$, a B jest macierzą $\bar{\phi}$.

3.9 Wniosek: jeśli U jest niezmiennicza, to $W_\phi = W_{\phi_{|U}} \cdot W_{\bar{\phi}}$.

3.10 Jeśli istnieje ciąg podprzestrzeni niezmienniczych

$$0 = V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \cdots \subset V^n = V$$

$\dim(V_k) = k$,?to w pewnej bazie ϕ ma macierz gżnotrójkątną z wartościami własnymi na przekątnej.

3.11 Lemat: dany kwadrat przemienny

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{\phi} & V & \\ f & \downarrow & & \downarrow & f \\ & V' & \xrightarrow{\psi} & V' & \end{array}$$

czyli $f\phi = \psi f$. Jeśli $U \subset V'$ jest ψ-niezmiennicza, tp $f^{-1}(U)$ jest ϕ-niezmiennicza.

3.12 Jeśli ciało jest algebraicznie domknięte, to istnieje conajmniej jedna wartość własna i wektor własny.

3.13 Niech ϕ będzie endomorfizmem zdefiniowanym nad ciałem $\mathbb{K}$. Jeśli wielomian charakterystyczny ma pierwiastki w ciele $\mathbb{K}$, istnieje ciąg podprzestrzeni liniowych niezmienniczych (filtracja)

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$$

takich, że $\dim V^i = i$. (Zatem $M(\phi)$ jest górnotrójkątna w pewnej bazie.)

Dowód indukcyjny korzystający z następujący oczywisty lematu 3.11. Stosujemy lemat do $\psi = \bar{\phi} \in End(V/\mathrm{lin}\{\alpha\})$, $f = \pi : V \to V/\mathrm{lin}\{\alpha\}$, gdzie α jest dowolnym wektorem własnym.

Uwaga: Zwykle powyższe twierdzenie dowodzi się przy założeniu, że ciało jest algebraicznie domknięte. Aby wykazać twierdzenie jedynie przy założeniu, że W_ϕ rozkłada się. W indukcji korzystamy z tego, że również że $W_{\bar{\phi}}$ rozkłada się na czynniki linowe.

3.14 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona: $W_\phi(\phi) = 0$.
W dowodzie korzystamy z tego, że każde ciało jest zawarte w ciele algebraicznie domkniętym. Istnieje filtracja niezmiennicza V_i. W odpowiedniej bazie macierz ϕ jest górno trójkątna, z wyrazami λ_i na przekątnej. Wtedy $(\phi - \lambda_i Id)(V_i) \subset V_{i-1}$. Stąd

$$\begin{aligned} &W_\phi(\phi)(V) = \\ &= (\phi - \lambda_1 Id)(\phi - \lambda_2 Id)\dots(\phi - \lambda_n Id)(V_n) \subset (\phi - \lambda_1 Id)(\phi - \lambda_2 Id)\dots(\phi - \lambda_{n-1} Id)(V_{n-1}) \subset \dots \\ &\qquad \dots \subset (\phi - \lambda_1 Id)(V_1) \subset V_0 = \{0\} \end{aligned}$$

4 Przestrzenie pierwiastkowe

4.1 Mówimy, że macierze kwadratowe A i B są podobne ($A \sim B$) jeśli istnieje macierz odwracalna C taka, że $CAC^{-1} = B$. To jest relacja równoważności.

Dla wygody jeśli dana macierz rozmiaru $n \times n$ to przekształcenia $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ zadane przez macierz A też oznaczam A. W szczególności mamy wielomian charakterystyczny $W_A(x) = det(A - xI)$.

4.2 Niezmienniki klasy równoważności podobieństwa. Jeśli $A \sim B$ to:

- $det(A) = det(B)$
- $tr(A) = tr(B)$
- wielomian charakterystyczny przekształcenia $W_A = W_B$
- spektrum $spec(A) = spec(B)$
- wymiary przestrzeni własnych $\dim(ker(A - \lambda id)) = \dim(ker(B - \lambda id))$
- $\dim(ker((A - \lambda id)^k)) = \dim(ker((B - \lambda id)^k))$

4.3 Jeśli A i B są diagonalizowalne to

$$spec(A) = spec(B) \quad \Leftrightarrow \quad A \sim B$$

4.4 Później z twierdzenia Jordana (patrz niżej) łatwo wynika (przy założeniu, że ciało jest algebraicznie domknięte)

$$\Big(\forall k \in \mathbb{N}\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \dim(ker((A - \lambda id)^k)) = \dim(ker((B - \lambda id)^k)) \Big) \quad \Leftrightarrow \quad A \sim B$$

4.5 Przestrzeń pierwiastkowa: $V_{(\lambda)} = \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} : (\phi - \lambda\, Id)^n(v) = 0\}$. (Inna nazwa: uogólniona przestrzeń własna.)

4.6 Oznaczenie: zbór wartości własnych endomorfizmu ϕ nazywamy spektrum i oznaczamy $spec(\phi)$.

4.7 Lemat o wielomianach: dane wielomiany $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{K}[x]$. Istnieją wielomiany $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{K}[x]$ takie, że $\sum g_i h_i = NWD(g_1, \ldots, g_m)$. (Dowód indukcyjny ze względu na m. Dla $m = 2$ algoryrm Euklidesa.)

4.8 Dowód 4.10 z lematu o wielomianach, jak w [Kos roz II §4.3].

4.9 Załóżmy, że $\phi : V \to V$ spełnia pewną tożsamość wielomianową $f(\phi) = 0$ (gdy $\dim(V) < \infty$ to np. $f = W_\phi$). Wielomian minimalny μ_ϕ jest wielomianem o najmniejszym stopniu spełniającym $\mu_\phi(\phi) = 0$. Każdy inny wielomian mający tę własność jest podzielny przez μ_ϕ. Naogół $\mu_\phi \neq W_\phi$, choć w μ_ϕ musi wystąpić każdy czynnik liniowy z W_ϕ.

4.10 Twierdzeinie o rozkładzie na przestrzenie pierwiastkowe. Jeśli $\dim(V) < \infty$ i $W_\phi(t)$ rozkłada się na czynniki liniowe w $\mathbb{K}$ (np. $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte), to

$$V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\phi)} V_{(\lambda)}.$$

4.11 Rozkład $V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\phi)} V_{(\lambda)}$ można udowodnić także gdy $\dim V = \infty$ oraz ϕ spełnia tożsamość wielomianową $f(\phi) = 0$ dla pewnego wielomianu rozkładającego się na czynniki liniowe.

4.12 Udowodniliśmy, że V rozkłada się na przestrzenie pierwiaskowe. Zatem możemy przyjąć, że $\phi := \phi_{|V_{(\lambda_i)}}$ spełnia równanie $(\phi - \lambda_i id)^n = 0$. Następnie zastępując ϕ przez $\phi - \lambda_i id$ możemy założyć, że $\phi^n = 0$.

4.13 Def: $\psi \in End(V)$ jest nilpotentny jeśli $\psi^n = 0$ dla pewnego n. Jeśli przestrzeń jest skończonego wymiaru, to ten warunek jest równoważny: $V = V_{(0)}$.

Na następnym wykładzie będziemy rozkładać przestrzeń V na podprzestrzenie ,,cykliczne". Celem jest:

Twierdzenie o postaci kanonicznej Jordana Dla każdego endomorfizmu przestrzeni skończonego wymiaru nad ciałem algebraicznie domkniętym istnieje baza, w której macierz przekształcenia jest klatkowo-diagonalna

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boxed{J_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

z klatkami postaci

$$J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \dots 0 & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

[Kos roz II §4.2]

5 Koniec dowodu tw Jordana i efektywne metody

5.1 Załóżmy, że ψ nilpotentny. Niech m najwięsze, takie, że $\psi^m(\alpha) \neq 0$. Wtedy wektory

$$\psi^m(\alpha), \psi^{m-1}(\alpha), \dots, \psi(\alpha), \alpha$$

są liniowo niezależne.

5.2 Def: V jest cykliczna (ze względu na ψ), jeśli istnieje wektor $\alpha \in V$, taki, że V jest rozpięta przez $\{\psi^i(\alpha) \mid i \geq 0\}$. Mówimy, że α generuje V.

5.3 Załóżmy, że ψ nilpotentny, V cykliczna, generowana przez α. Niech m najwięsze, takie, że $\psi^m(\alpha) \neq 0$. Wtedy wektory

$$\psi^m(\alpha), \psi^{m-1}(\alpha), \dots, \psi(\alpha), \alpha$$

są bazą V. Macierz ψ tej w bazie jest postaci Jordana z jedną klatką o wartości własnej $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podsumowanie: Pokazaliśmy, że V rozkłada się na przestrzenie pierwiastkowe. Na $V(\lambda)$ przekształcenie $\psi = \phi - \lambda Id$ jest nilpotentne. W następnym kroku udowodnimy,?że $V(\lambda)$ rozkłada się na sumę prostą przestrzeni cyklicznych.

5.4 Lemat: Załóżmy, że ψ nilpotentny na V oraz $W \neq V$ podprzestrzeń cykliczna maksymalnego wymiaru. Wtedy istnieje wektor własny $\beta \in V \setminus W$.
Dow: Rozpatrzeć $\bar{\psi} : V/W \to V/W$ i tam wybrać wektor własny, wziąć jego przeciwobraz w V i poprawić tak by był wektorem własnym.

5.5 Lemat: Załóżmy, że ψ nilpotentny na V oraz W podprzestrzeń cykliczna maksymalnego wymiaru. Wtedy istnieje niezmiennicze dopełnienie do sumy prostej $V = W \oplus U$.
Dow. Indukcja po $\dim(V)$: dzielimy V przez $lin(\beta)$.

5.6 Ćwiczenie: wzór na wielomian minimalny

$$\mu_\phi = \prod_{\lambda \in Spec(\phi)} (x - \lambda)^{r(\lambda)},$$

gdzie $r(\lambda)$ jest rozmiarem maksymalnej klatki Jordana z wartością własną λ.

5.7 Przykład: $M(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Jedna klatka dla wartości własnej 4 rozmiaru 1 i jedna dla wartości własnej 1 rozmiaru 3.

Efektywne znajdowanie bazy Jordana i jednoznaczności rozkładu

5.8 Szukanie bazy Jordana: dla $\lambda \in Spec(\phi)$. Rozważamy ciąg podprzestrzeni

$$V = im(\psi^0) \supset im(\psi^1) \supset im(\psi^2) \supset \cdots \supset im(\psi^{r(\lambda)-1}) \supset im(\psi^p) = im(\psi^{p+1}) = im(\psi^{p+2}) = \ldots$$

Wnioskujemy, że $p = r(\lambda)$ jest rozmiarem największej klatki,

$$im(\psi^p) = \bigoplus_{\mu \neq \lambda} V_{(\mu)}, \qquad ker(\psi^p) = V_{(\lambda)}, \qquad V = im(\psi^p) \oplus ker(\psi^p).$$

Konstruujemy ,,łańcuszki"

$$\alpha_1^{(i)} \mapsto \alpha_2^{(i)} \mapsto \cdots \mapsto \alpha_{p-1}^{(i)} \mapsto \alpha_p^{(i)} \mapsto 0$$

biorąc za $\alpha_p^{(i)}$ bazę $ker(\psi) \cap im(\psi^{p-1})$. Dobieramy wektory $\alpha_{p-j}^{(i)} \in ker(\psi^j) \cap im(\psi^{p-j})$ biorąc przeciwobrazy $\alpha_{p-j+1}^{(i)}$. Jeśli na którymś etapie układ wektorów $\{\alpha_{p-j}^{(i)}\}$ nie rozpina $im(\psi^{p-j}) \cap ker(\psi^j)$ to uzupełniamy go do bazy tej przestrzeni.

5.9 Inna metoda znajdowana bazy Jordana: badamy ciąg

$$0 = ker(\psi^0) \subset ker(\psi^1) \subset ker(\psi^0) \subset \cdots \subset ker(\psi^p) = ker(\psi^{p+1}).$$

Jeśli wiemy, że w postaci Jordana jest $d = d(p, \lambda)$ klatek rozmiaru p, to wybieramy d wektorów liniowo niezależnych w $\alpha_1^{(i)} \in \ker(\psi^p)$ jeśli ten wybór jest dostatecznie przypadowy, to układ wektorów $\alpha_j^{(i)} = \psi^{j-1}(\alpha_1^{(i)})$ $(i = 1, \ldots d,\ j = 1, \ldots p)$ będzie liniowo niezależny. Układ ten należy dopełniać indukcyjnie do układu liniowo niezależnego wybierając wektory z $ker(\psi^k)$ dla $k = p-1, p-2, \ldots, 1$.

5.10 Ilość i typ klatek Jordana nie zależy od wyboru bazy Jordana. Ilość klatek k-wymiarowych z wartością własną λ jest równa $d(k,\lambda)$. Niech $\psi = \phi - \lambda Id$. Mamy

$$\sum_{\ell \geq k} d(\ell,\lambda) = \dim(\ker(\psi^k) - \dim(\ker(\psi^{k-1}).$$

Stąd

$$d(k,\lambda) = 2\dim(\ker(\psi^k) - \dim(\ker(\psi^{k-1}) - \dim(\ker(\psi^{k+1}) = r(\psi^{k+1}) + r(\psi^{k-1}) - 2r(\psi^k).$$

6 Jednoznaczność postaci Jordana

6.1 Mówimy, że endomorfizm ϕ jest półprosty, jeśli dla każdej niezmienniczej przestrzeni $U \subset V$ istnieje niezmiennicze dopełnienie $W \subset V$ do sumy prostej.

6.2 Nad ciałem algebraicnie domkniętym ϕ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ jest półprosty. (Ćw.)

6.3 Dla endomorfizmu diagonalizowalnego jeśli $(\phi - \lambda\, Id)^m(\alpha) = 0$ to $(\phi - \lambda\, Id)(\alpha) = 0$.

6.4 Endomorfizm diagonalizowalny ϕ ma własność: $ker(\phi) = ker(\phi^n)$ dla każdego $n \geq 1$.

6.5 Ćwiczenie: sprawdzić powyższą własność dla półprostego $\phi \in End(V)$.

6.6 (Addytywny rozkład Jordana-Chevalleya.) Jeśli ϕ zapisać jako $\phi = \phi_d + \phi_n$, gdzie ϕ_d jest półprosty, a ϕ_n jest nilpotentny oraz $\phi_n\phi_d = \phi_d\phi_n$ to składniki są wyznaczone jednoznacznie.

6.7 Dowodzimy, że $ker(\phi_d - \lambda\, Id) = V_{(\lambda)}$. Z tego wynika, że ϕ_d na $V_{(\lambda)}$ musi być mnożeniem przez skalar λ.
Dow. Niech N będzie takie, że $\phi_n^N = 0$ oraz $V_{(\lambda)} = ker((\phi - \lambda\, Id)^N)$.

(a) $ker(\phi_d - \lambda\, Id) \subset ker((\phi - \lambda\, Id)^N)$ bo dla $\alpha \in ker(\phi_d - \lambda\, Id)$
$(\phi - \lambda\, Id)^N = ((\phi_d - \lambda\, Id) + \phi_n)^N(\alpha) = \phi_n^N(\alpha) = 0$

(b) $ker((\phi - \lambda\, Id)^N) \subset ker(\phi_d - \lambda\, Id)$.
Wystarczy pokazać, że dla $\alpha \in ker((\phi - \lambda\, Id)^N)$ mamy $\alpha \in ker((\phi_d - \lambda\, Id)^{2N})$.
$(\phi_d - \lambda\, Id)^{2N}(\alpha) = \sum_{k=0}^{2N}(-1)^k\binom{2N}{k}\phi_n^k(\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(\alpha) =$
$= \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\binom{2N}{k}\phi_n^k(\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(\alpha) + \sum_{k=N}^{2N}(-1)^k\binom{2N}{k}\phi_n^k(\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(\alpha)$
Ale $\phi_n^k = 0$ dla $k \geq N$, więc powyższa suma jest równa
$= \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\binom{2N}{k}\phi_n^k(\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(\alpha) = 0.$

6.8 Z powyższego lematu wynika jednoznaczność, bo dostaliśmy, że $(\phi_d)_{|V_{(\lambda)}} = \lambda\, Id$. Korzystamy z rozkładu $V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\phi)} V_{(\lambda)}$.

6.9 Jak znaleźć ϕ_d nie szukając bazy Jordana?
Twierdzenie: istnieje wielomian $h \in \mathbb{K}[x]$ taki,że $\phi_d = h(\phi)$.

6.10 *Twierdzenie Chińskie o resztach dla wielomianów.* Niech $g_1, g_2, \ldots, g_m \in \mathbb{K}[x]$ będą wielomianami parami względnie pierwszymi, oraz niech $h_1, h_2, \ldots h_m \in \mathbb{K}[x]$ dowolnymi wielomianami. Wtedy istnieje $h \in \mathbb{K}[x]$ taki że dla $k = 1, 2, \ldots, m$ mamy $h \equiv h_k \bmod g_k$.

Dowód dla $\mathcal{R} = \mathbb{K}[x]$. Oznaczmy przez $\mathbb{K}[x]/(f)$ zbiór reszt z dzielenia przez f. Oczywiście $\dim(\mathbb{K}[x]/(f)) = \deg f$. Niech $g = g_1 g_2 \ldots g_m$ oraz

$$\theta : \mathbb{K}[x]/(g) \to \mathbb{K}[x]/(g_1) \times \mathbb{K}[x]/(g_2) \times \cdots \times \mathbb{K}[x]/(g_m)$$

będzie zadane wzorem

$$h \mapsto (h \bmod g_1 \ , \ h \bmod g_2 \ , \ \ldots \ , \ h \bmod g_m)$$

Sprawdzamy, że θ jest monomorfizmem. Ponieważ dziedzina i przeciwdziedzina mają równe wymiary, więc θ jest epimorfizmem.

6.11 Konstrukcja H spełniającego $h(\phi) = \phi_d$: Niech $\mu_\phi = \prod_{k=1}^{m} (\lambda_k - t)^{n_k}$ będzie wielomianem minimalnym (można też wziąć wielomian charakterystyczny). Niech $h_k = (\lambda_k - t)^{n_k}$, $h_k = \lambda_k$. Znajdujemy h z tw. chińskiego o resztach. Dla każdego k

$$h(x) = f_k(x)(\lambda_k - x)^{n_k} + \lambda_k$$

W obcięciu do $V_{(\lambda_k)}$ przekształcenie $h(\phi)$ jest mnożeniem przez λ_k. Zatem $h(phi) = \phi_d$.

6.12 Przykład: jeśli $\mu_\phi = (a - t)^2 (b - t)^2$ to $H(t) = \frac{1}{(a-b)^2}(-2t^3 + 3(a + b)t^2 - 6abt + ab(a + b))$.

6.13 Wniosek: jeśli W jest ϕ-niezmennicza, to jest ϕ_d-niezmiennicza i ϕ_n-niezmiennicza.

GAL*, konspekt wykładów: Przestrzenie afiniczne

5 kwietnia 2018

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Przestrzenie Afiniczne [Kos roz. 4, §1]

1.1 Definicja przestrzeni afinicznej: (E, V, ω), gdzie E zbiór, V przestrzeń liniowa, $\omega : E \times E \to V$ odwzorowanie, które spełnia

1. $\omega(p,q) + \omega(q,r) = \omega(p,r)$
2. $\forall p \in E\ \forall \alpha \in V\ \exists! q \in E\ :\ v = \omega(p,q)$

tzn $\forall p \in E$ odwzorowanie $\omega(p,-) : E \to V$ jest bijekcją.

Przestrzeń V nazywamy przestrzenią styczną i oznaczamy przez TE.

1.2 Czasami wektor $\omega(p,q)$ jest oznaczany $\overrightarrow{pq}$.

1.3 Naczelny przykład: V – przestrzeń wektorowa, ($E = V,\ V,\ \omega(p,q) = q - p$).

1.4 Operacja $\boldsymbol{+} : E \times V \to E$ zdefiniowana przez warunek $p \boldsymbol{+} \omega(p,q) = q$:

1') $(p \boldsymbol{+} v) \boldsymbol{+} w = p \boldsymbol{+} (v + w)$ dla $p \in E,\ v, w \in V$

2') $\forall p \in E,\ V \ni v \mapsto p \boldsymbol{+} v \in E$ jest bijekcją.

1.5 Ćwiczenie: $(p \boldsymbol{+} v) \boldsymbol{+} w = p \boldsymbol{+} (v + w)$

1.6 Mamy $\omega(p,p) = 0$, $\omega(p,q) = -\omega(q,p)$ oraz $p \boldsymbol{+} 0 = p$ dla $p, q \in E$.

1.7 Kombinacje afiniczne, czyli środki ciężkości (barycentry) $\sum_{i=0}^{k} a_i\, p_i := q \boldsymbol{+} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\, \omega(q, p_i) \right)$ dla $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$. Niezależność od $q \in E$.

(W dalszej części nie będziemy już używać specjalnego $\boldsymbol{+}$, tylko zwykły $+$.)

2 Bazy punktowe, podprzestrzenie adiniczne

2.1 Układy rozpinające, niezależne układy punktów, bazy punktowe.

2.2 $p_0, p_1, \ldots, p_n$ jest niezależny/rozpinający/jest bazą E wtedy i tylko wtedy gdy $\omega(p_0,p_1), \omega(p_0,p_2) \ldots, \omega(p_0,p_n)$ jest niezależny/rozpinający/jest bazą V.

2.3 Wniosek: Trzy warunki równoważne

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ jest bazą punktową

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ to minimalnym układem rozpinającym,

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ to maksymalnym układem niezależnym.

2.4 Współrzędne baryczentryczne w bazie punktowej.

2.5 Mając bazę punktową $p_0, p_1, \ldots, p_n$ można utożsamiać E z podzbiorem $\mathbb{K}^{n+1}$

$$\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1\}.$$

2.6 Definicja: Niech $F \subset E$, $W \subset V$, $\omega' = \omega_{|F \times F}$. Trójka (F, W, ω') jest podprzestrzenią (E, V, ω) gdy
– $\forall p, q \in F\ \omega(p.q) \in W$
– $\forall p \in F$ funkcja $\omega(p, _) : F \to W$, $q \mapsto \omega(p, q)$ jest bijekcją.

2.7 Podzbiór $F \subset E$ jest podprzestrzenią afiniczną (a ściślej: istnieje $W \subset V$ takie, że $(F, W, \omega_{|F \times F})$ jest podprzestrzenią) wtedy i tylko wtedy, gdy F jest zamknięty ze względu na branie kombinacji afinicznych.

Dow ($\Leftarrow$): Definiujemy $W = \{\omega(p, q) \mid p, q \in F\}$. Sprawdzamy, że W jest podprzestrzenią liniową
– $a\omega(p, q) = \omega(p, q')$ dla $q' = (1 - a)p + aq$,
– $\omega(p, q) + \omega(r, s) = \omega(p, q) + \omega(r, p) + \omega(p, s) = \omega(p, q) - \omega(p, r) + \omega(p, s) = \omega(p, q')$
dla $q' = 1\, q + (-1)r + 1\, s$.
Przy okazji zauważamy, że dla ustalonego p, kładąc $p = q$, przestrzeń $\{\omega(p, q') \mid q' \in F\}$ jest równa W. Zatem przekształcenie $F \to W$, $q \mapsto \omega(p, q)$ jest ,,na" i oczywiście jest różnowartościowe.

2.8 Załóżmy $char(\mathbb{K}) \neq 2$. Zbiór zamknięty ze względu na dwuelementowe kombinacje afiniczne jest podprzestrzenią afiniczną.

2.9 Każda podprzestrzeń $F \subset E$ jest postaci $p + W$, gdzie W jest podprzestrzenią liniową w TE. Przestrzeń liniowa W nie zależy od wyboru $p \in F$.

2.10 Każda podprzestrzeń afiniczna w E jest postaci $p + W$, gdzie $p \in E$, $W \subset V = TE$.

2.11 Parametryczne przedstawienie: np prosta $L(p, q) = \{p + t\omega(p, q) \mid t \in \mathbb{K}\}$.

2.12 Każda podprzestrzeń afiniczna w $\mathbb{K}^n$ jest opisana niejednorodnym układem równań liniowych.

2.13 Część wspólna rodziny podprzestrzeni jest pusta lub jest podprzestrzenią.

2.14 Istnieje najmniejsza podprzestrzeń $af(A)$ zawierająca dany zbiór A. Składa się ona z kombinacji afinicznych punktów z A.

2.15 Równoloegość:
F_1 jest słabo równolełe do F_2 gdy $TF_1 \subset TF_2$ (to jest relacja kwaziporządku).
F_1 jest silnie równolełe do F_2 gdy $TF_1 = TF_2$ (to jest relacja równoważności)

2.16 Podprzestrzenie F_1 i F_2 są skośne jeśli $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ i $TF_1 \cap TF_2 = \{0\}$.

2.17 Ćwiczenie: jeśli F_1 i F_2 są skośne to $\dim(F_1) + \dim(F_2) < \dim(E)$.

2.18 Ćwiczenie: Jeśli F_1 jest słabo równolełe do F_2, oraz $F_1 \not\subset F_2$ to $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

3 Afiniczne przekształcenia

3.1 Definicja 1. Przekształcenie przestrzeni afinicznych

$$(E, V, \omega_E) \longrightarrow (F, W, \omega_F)$$

to para przekształceń

$$\phi : E \longrightarrow F \qquad \text{(przekształcenie zbiorów)}$$

$$D\phi : V \longrightarrow W \qquad \text{(przekształcenie liniowe)}$$

takie, że

$$\omega_F(\phi(p), \phi(q)) = D\phi(\omega_E(p, q)) \,.$$

3.2 Definicja 2/Twierdzenie: Przekształcenie $\phi : E \to F$ jest afiniczne jeśli przeprowadza kombinacje afiniczne na kombinacje afiniczne obrazów.

Dow. Trzeba skonstruować przekształcenie liniowe przestrzeni stycznychh $\widetilde{\phi} = D\phi : TE \to TF$.

$$D\phi(v) := \omega(\phi(p), \phi(p + v))$$

(Sprawdzamy, że definicja nie zależy od wyboru $p \in E$, oraz że $D\phi$ jest liniowe. Wsk: $p' + v$ jest kombinacją afiniczną $1p' + 1(p + v) + (-1)p$.)

3.3 Przekształcenie styczne (pochodna) $D\phi$ i wybór $\phi(p) \in F$ dla ustalonego $p \in E$ definiuje przekształcenie afiniczne, tzn jeśli dane jest przekształacenie liniowe $\phi_0 : TE \to TF$ oraz dowolne punkty $p \in E$, $q \in F$, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\phi : E \to F$ takie, że $\phi(p) = q$ oraz $D\phi = \phi_0$.

3.4 Przekształcenie afiniczne jest zadane przez wybór obrazów bazy punktowej.

3.5 We współrzędnych: przekształcenia afiniczne $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ są postaci

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b_1, f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b_2, \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b_m) \,.$$

gdzie $D\phi = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ jest przekształceniem liniowym, $\phi(0, 0, \ldots, 0) = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

3.6 Przekształcenie afiniczne ϕ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy $D\phi$ jest izomorfizmem liniowym.

3.7 Wybieramy $p \in E$ i $p' \in F$. Wtedy

$$\begin{array}{rcl} \text{przekształcenia afiniczne}(E, F) & \simeq & TF \times L(TE, TF), \\ \phi & \longrightarrow & (\omega(p', \phi(p)), D\phi) \\ \big(\, q \mapsto p' + v + D\phi(\omega(p, q)) \, \big) & \longleftarrow & (v, D\phi) \,. \end{array}$$

3.8 Dany wektor $v \in V = TE$. Przez T_v oznaczamy przesunięcie $T_v(p) = p + v$.

3.9 Każde przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształcenia liniowego i przesunięcia.

3.10 Jeśli $D\phi$ jest izomorfizmem, to ϕ jest izomorfizmem. Każde dwie przestrzenie tego samego wymiaru są izomorficzne. W szczeglnoci jeśli $\dim E = n$, to $E \simeq \mathbb{K}^n$. Izomorfizm zależy od wyboru punktu $p \in E$ i wyboru bazy w TE.

3.11 Przeciwobraz podprzestrzeni afinicznej przy przekształceniu afinicznym jest podprzestrzenią afiniczną. Każda podprzestrzeń w $\mathbb{K}^n$ jest przeciwobrazem 0 przy pewnym przekształceniu afinicznym $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

3.12 Składanie przekształceń. Wybieramy $p_E \in E$, $p_F \in F$ oraz w $p_G \in G$. co pozwala nam utożsamić $E \simeq TE$, $F \simeq TF$ i $G \simeq TG$.

$$TF \times L(TE, TF) \simeq Aff(E, F) = \text{przekształcenia afiniczne}(E, F),$$

$$(v, D\phi) = T_v \circ D\phi$$

$$TG \times L(TF, TG) \simeq Aff(F, G) = \text{przekształcenia afiniczne}(F, G),$$

$$(w, D\psi) = T_w \circ D\psi$$

$$TG \times L(TE, TG) \simeq Aff(E, G) = \text{przekształcenia afiniczne}(E, G),$$

$$(w, D\psi) \circ (v, D\phi) = T_w \circ D\psi \circ T_v \circ D\phi$$

$$u \mapsto D\phi(u) + v \mapsto D\psi(D\phi(u) + v) + w = D\psi(D\phi(u)) + (D\psi(v) + w).$$

Zatem złożeniu o dpowiada para

$$(w, D\psi) \circ (v, D\phi) = (w + D\psi(v), D\psi \circ D\phi)$$

3.13 Wniosek: $D(\psi \circ \phi) = D\psi \circ D\phi$

Odsyłacz do grupy przekształceń: Kostrikin Roz 4,§3.

3.14 Grupa izomorfizmów afinicznych $Aff^o(E) \subset Aff(E, E)$.
Odwzorowanie $D : Aff^o(E) \to GL(TE)$ jest homomorfizmem, tzn

$$D(\phi \circ \psi) = D(\phi) \circ D(\psi)\,, \qquad D(Id_E) = Id_{TE}.$$

3.15 Odwzorowanie D jest epimorfizmem.

$$ker(D) = \{\phi \in Aff^o(E) \mid D\phi = Id_{TE}\} = \{T_v \mid v \in TE\}.$$

Mamy ciąg przekształceń

$$\begin{array}{ccccc} TE & \overset{mono}{\hookrightarrow} & Aff(E) & \overset{epi}{\twoheadrightarrow} & GL(TE) \\ v & \overset{i}{\mapsto} & T_v & & \\ & & \phi & \mapsto & D\phi \end{array}$$

Mówimy, że ten ciąg jest dokładny (warunek $im(i) = ker(D)$).

3.16 Jeśli utożsamić $Aff(E)$ z $TE \times GL(TE)$ (wybierając punkt bazowy w E) to składanie zadane jest wzorem

$$(w, \psi_0) \circ (v, \phi_0) = (w + \psi_0(v), \psi_0 \circ \phi_0)\,.$$

Grupa z takim działaniem składania jest szczególnym przypadkiem tzw produktu półprostego $TE \rtimes GL(TE)$.

3.17 Niezmienniki przekształceń afinicznych:
- współliniowość (koplanarność, etc) punktów
- równoległość podprzestrzeni (słaba i silna)
- proporcje podziału odcinka.
- np przecinanie się trzech prostych $L(p_i, q_i)$, $i = 1, 2, 3$ w jednym punkcie

4 Różne rachunki w przestrzeniach afinicznych

4.1 Dane punkty $[p_1, p_2, p_3]$, $[q_1, q_2, q_3]$, $[r_1, r_2, r_3] \in \mathbb{K}^3$, które są afinicznie niezależne.
Wzór na powierzchnnię $af(p, q, r)$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Można traktować ten wzór jako otrzymany ze wzoru na przestrzeń liniową w $\mathbb{K}^4$ rozpiętą przez wektory $(1, p_1, p_2, p_3)$, $(1, q_1, q_2, q_3)$, $(1, r_1, r_2, r_3)$.

4.2 Pęk płaszczyzn: każda płaszczyzna zawierająca prostę

$$L = \{x \in \mathbb{K}^3 \mid a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,\ b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0\}$$

ma równanie postaci

$$\{x \in \mathbb{K}^3 \mid \lambda(a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \mu(b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0\}$$

dla pewnych $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Można wykorzystać to szukając równania płaszczyzny zawierającej dany punkt p oraz L.

4.3 Czy każde dwie trójki prostych w $\mathbb{K}^3$ parami skośnych są afinicznie równoważne? TAK, jeśli ich przestrzenie styczne rozpinają przestrzeń liniową $\mathbb{K}^3$.

4.4 Przykład przekształcenia: rzutownie afiniczne. Niech $F \subset E$, $TE = TF \oplus V$. Istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne ϕ, które jest stałe na F oraz $D\phi$ jest rzutowaniem względem TF wzdłuż V.

Przestrzenie rzutowe.

4.5 Dana przestrzeń wektorowa V nad ciałem K. Zbiór prostych (przechodzących przez 0) w V oznaczamy przez $\mathbb{P}(V)$. Mamy $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\sim$, gdzie $v \sim w$ gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $v = \lambda w$.

4.6 Oznaczenie $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Elementy przestrzeni rzutowej są oznaczane przez

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$$

(to jest klasa wektora $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, czyli prosta rozpięta przez ten wektor, albo inaczej — wektor z dokładnością do proporcjonalności).

4.7 Niech $\mathbb{K}^n \subset \mathbb{K}^{n+1}$ będzie podprzestrzenią liniową rozpiętą przez ostatnie n współrzędnych. Niech $E = (1,0,0,0,\ldots,0) + \mathbb{K}^n$, Każda prosta nie zawarta w $\mathbb{K}^n$ przecina E w dokładnie jednym punkcie. To daje utożsamienie $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) \setminus \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ z E. Swoją drogą $E \simeq \mathbb{K}^n$.

4.8 Ogólniej Niech $E \subset V$ będzie podprzestrzenią afiniczną, $0 \notin E$, $\dim V - \dim E = 1$. Dopełnienie $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(TE)$ można utożsamić z E.

4.9 $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ można pokryć zbiorami $U_i = \{x_i \neq 0\}$. W zbiorze U_i mamy współzędne

$$u_0 = \tfrac{x_0}{x_i},\ u_1 = \tfrac{x_1}{x_i}, \ldots,\ \text{bez } u_i\ , \ldots\ u_n = \tfrac{x_n}{x_i}\ .$$

4.10 Przykład $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$:
- $u = \frac{x_1}{x_0}$ współrzędna w U_0,
- $v = \frac{x_0}{x_1}$ współrzędna w U_1.

Mamy $u = 1/v$ (tam gdzie to ma sens).

4.11 Przykład $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$:
- $u_1 = \frac{x_1}{x_0}$, $u_2 = \frac{x_2}{x_0}$ współrzędne w U_0,
- $v_0 = \frac{x_0}{x_1}$, $v_2 = \frac{x_2}{x_1}$ współrzędne w U_1,
- $w_0 = \frac{x_0}{x_2}$, $w_1 = \frac{x_1}{x_2}$ współrzędne w U_2.

Mamy

$$u_1 = \frac{1}{v_0} = \frac{w_1}{w_0}\,, \qquad u_2 = \frac{v_2}{v_0} = \frac{1}{w_0}$$

(tam gdzie to ma sens).

4.12 Zobaczyć jak wygląda okrąg $(u_1)^2 + (u_2)^2 = 1$ we współrzędnych v_0, v_2 oraz we współrzędnych w_0, w_1.

5 Przestrzenie rzutowe

5.1 Przyglądamy się krzywym na płaszczyźnie rzutowej $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ w różnych układach współrzędnych.

— Dana parabola $u_2 = u_1^2$ (tzn $\frac{x_1}{x_0} = (\frac{x_1}{x_0})^2$). Zobaczyć jakie jest jej przecięcie z ,,prostą w nieskończoności" zadanaą przez równanie $x_0 = 0$ we współrzędnych $v_0 = \frac{x_0}{x_1}$, $v_2 = \frac{x_2}{x_1}$.

— Ćw: Dane proste w $\mathbb{K}^2$ ze współrzędnymi u_1, u_2 zadane równaniami $u_2 = a$ i $u_2 = b$, $a \neq b$. Jako proste afiniczne są równoległe (nie przecinają się). Utożsamiamy $\mathbb{K}^2$ z $U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Zobaczyć jak wyglądają te proste we współrzędnych $v_0 = 1/u_1$, $v_2 = u_2/u_1$.

5.2 Przekształcenia rzutowe przestrzeni rzutowej: $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \mapsto [f_0(x) : f_1(x) : \cdots : f_n(x)]$, gdzie $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ oraz $f = (f_0, f_1, \ldots f_n) : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ jest izomorfizmem liniowym.

5.3 Przekształcenia rzutowe przestrzeni afinicznej $\mathbb{K}^n$ utożsamianej z U_0 (jest nie wszędzie określone):

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto (\frac{\bar{f}_1}{\bar{f}_0}, \frac{\bar{f}_2}{\bar{f}_0}, \ldots, \frac{\bar{f}_n}{\bar{f}_0}),$$

gdzie $\bar{f}_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ są funkcjami afinicznymi powstałymi z funkcji liniowych $f_i : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ przez podstawienie $x_0 = 1$ w **(5.2)**).

5.4 Przykład: $\phi(u_1, u_2) = (1/u_1, u_2/u_1)$, przeciwobraz okręgu $(u_1')^2 + (u_2')^2 = 1$ jest hiperbolą.

5.5 Przekształcenia przestrzeni rzutowej zadane izomorfizmem liniowym przestrzeni V są oznaczane przez $PGL(V)$, lub gdy $V = \mathbb{K}^{n+1}$ przez $PGL_{n+1}(\mathbb{K})$. Mamy $PGL(V) = GL(V)/\sim$, gdzie $\phi \sim \psi$ gdy $\phi\psi^{-1} = \lambda Id_V$.

5.6 Przekształcenie $(u_1, u_2) \mapsto (\frac{2u_1}{1+u_2}, \frac{1-u_2}{1+u_2})$ przekształaca parabolę $u_2 = u_1^2$ na okrąg.

5.7 Przekształcenia rzutowe $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ zachowujące $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$, są indukowane przez $\phi \in GL(\mathbb{K}^{n+1})$,

$$\phi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (f_0(x_0, x_1, \ldots, x_n), f_1(x_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n))$$

takie, że $f_0(1, x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Czyli takie, że $f_0(1, x_1, \ldots, x_n) = a_{0,0}$. Tzn macierz ϕ ma w ,,zerowym" wierszu tylko ,,zerowy" wyraz różny od zera. Takie przekształcenie rzutowe ma wzór we spółrzędnych afinicznych

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \left(\frac{f_0(1, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{a_{0,0}}, \frac{f_1(1, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{a_{0,0}}, \ldots, \frac{f_n(1, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{a_{0,0}} \right),$$

Zatem jest przekształceniem afinicznym. (Inna charakteryzacja: $\phi(\{x_0 = 0\}) = \{x_0 = 0\}$, tzn zachowuje hiperpłaszczyznę w nieskończoności.)

5.8 Mamy
$\{\phi \in Aff(\mathbb{K}^n) \mid \phi(0) = 0\} = GL(\mathbb{K}^n)$
$\{\phi \in$ Przekształcenia rzutowe $\mid \phi(\{x_0 = 0\}) = \{x_0 = 0\}\ \} = Aff(\mathbb{K}^n)$

5.9 Przekształcenie prostej rzutowej: $x \mapsto \frac{a_{10}+a_{11}x}{a_{00}+a_{11}x}$ można przedstawić jako złożenie przekształceń afinicznych i $x \mapsto 1/x$ bo $\frac{a_{10}+a_{11}x}{a_{00}+a_{11}x} = \alpha(1 + \beta\frac{1}{x+\gamma})$ dla pewnych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.
(Przekształcenia postaci $a \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$ nazywamy homografiami.)

5.10 Przekształcenia liniowe zachowują proporcję $a := \alpha/\beta$, dla $\alpha = a\beta$.
Przekształcenia afiniczne zachowują stosunek $\lambda(p, q, r) := \lambda = \frac{p-r}{p-q}$ gdy $r = (1 - \lambda)p + \lambda q$.

5.11 Niech $L \subset \mathbb{P}(V)$ będzie prostą w przestrzeni rzutowej. Wprowadzamy współrędną na prostej, tzn utożsamić L z $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Dla $p, q, r, s \in \mathbb{K}$ definiujemy dwustosunek:

$$(p, q; r, s) := \frac{\lambda(p, s, r)}{\lambda(q, s, r)} = \frac{p - r}{p - s} \cdot \frac{q - s}{q - r} \in \mathbb{K}.$$

5.12 Tw: Przekształcenia rzutowe zachowują dwustosunek.
(Dw: Bo przekształcenia afiniczne zachowują stosunek trzech punktów na prostej. Wystarczy sprawdzić dla $x \mapsto 1/x$.)

5.13 Przekształcenie liniowe jest wyznaczone przez wartośći na n wektorach liniowo niezależnych $(n = \dim(V))$.

5.14 Przekształcenie afiniczne jest wyznaczone przez wartośći na $n+1$ punktach afinicznie niezależnych $(n = \dim(E))$.

5.15 Niecv $\dim V = n+1$. Punkty $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ są w położeniu ogólnym, gdy żadne $n+1$ z nich nie leży w przestrzeni rzutowej mniejszego wymiaru (Warunek na położenie ogólne w języku przestrzeni liniowych: Niech $L_i = lin\{v_i\}$, $i = 0, 1, \ldots n+1$; zakładamy, że każde $n+1$ wektorów v_i jest liniowo niezależnych.)

5.16 Tw: Przekształcenie rzutowe $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ jest wyznaczone przez wartości na $n+2$ punktach położeniu ogólnym.

6 c.d.

Dowód: niech $p_i = [\varepsilon_i] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dla $0 \leq i \leq n$ będzie prostą rozpiętą przez standardowy i-ty wektor bazowy $\mathbb{K}^{n+1}$ oraz $p_{n+1} = [1 : 1 : \cdots : 1]$. Dany $q_i = [w_i]$ inny układ prostych, takich, że każde $n+1$ spośród wektorów w_i są liniowo niezależne. Istnieje przekształcenie liniowe $\mathbb{K}^{n+1}$ przekształcające ε_i na w_i dla $i \leq n$. Dlatego można założyć, że $w_i = \varepsilon_i$ dla $i \leq n$. Niech $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ będą współrzędnymi wektora w_{n+1}. Przekształcenie o macierzy diagonalnej z $a_0, a_1, \ldots, a_n$ na przekątnej przeprowadza $(1, 1, \ldots, 1)$ na w_{n+1}. Z dokładnością do proporcjonalności przekształcenie to jest jedyne, jeśli ma zachowywać osie w $\mathbb{K}^{n+1}$, a obraz $(1, 1, \ldots, 1)$ ma być proporcjonalny do w_{n+1}.

6.1 Dla $n = 1$, tzn dla $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$, w jezyku przestrzeni liniowych: przekształcenie liniowe $\mathbb{K}^2$ jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do skalara przez warunek na trójce prostych: $\phi(K) = K'$, $\phi(L) = L'$, $\phi(M) = M'$ (pod warunkiem, że K, L, M są parami różne).

6.2 Twierdzenie Pappusa Aleksandryjskiego 290–350 n.e. (patrz wykład Hitchina poniżej). (Dowód stosujący Tw 5.16.)

6.3 Więcej o przestrzeniach rzutowych
Wykład Hitchina
https://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/hitchinnotes/Projective_geometry/Chapter_1_Projective_geometry.pdf

6.4 Ćwiczenie: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ = Sfera/antypodyzm = dysk $\cup$ wtęga Möbusa.

6.5 Zbiory algebraiczne
1) w przestrzeni afiniczniej $\mathbb{K}^n$,
2) w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
Podstawianie $x_0 = 1$ w równaniu pozwala przechodzić z 2) do 1)
Przejście 1) do 2): operacja ujednoradniania równań.

6.6 Suma i część wspólna zbiorów algebraicznych jest zbiorem algebraicznym.

6.7 Przykłady:
– krzywe stożkowe,
– krzywe eliptczne w postaci Weierstrassa $y^2 = x^3 + px + q$ (postać rzutowa $x_0x_2^2 - (x_1^3 + px_0^2x_1 + qx_0^3) = 0$).

6.8 Ćwiczenie: dana jest krzywa $Q \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ zadana równaniem $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ (czyli afinicznie równanie okręgu). Podać przekształcenie wielomianowe $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ zadające bijekcję $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \simeq Q$. (Nad dowolnym ciałem !!!)

6.9 Formy jednorodne. Formy kwadratowe = formy jednorodne stopnia 2.

6.10 Twierdzenie: Zakładamy, że charakterystyka ciała jest różna od 2. Dana forma kwadratow f w $\mathbb{K}^n$. Istnieję liniowa zamiana zmiennych w $\mathbb{K}^n$ taka, że

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2$$

przy czym $a_i \neq 0$.

6.11 Wniosek: Jeśli ciało jest algebraicznie domknięte (wystarczy, że można wyciągać pierwiastki), to

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$$

w pewnych współrzędnych. Liczba r to rząd formy. Ta liczba w pełni charakteryzuje formę.

6.12

6.13 Wniosek: Jeśli ciało $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r_+} x_i^2 - \sum_{i=1+r_+}^{r} x_i^2$$

w pewnych współrzędnych. Liczba r i r_+ w pełni charakteryzują formę. (To jest twierdzenie o bezwładności, będzie później.)

6.14 Uwaga: dla odmiany klasyfikacja form trzeciego stopnia (dla trzech zmienych) jest o wiele bardziej skomplikowana. Patrz „j-invariant" dla krzywej eliptycznej. Dla postaci Weierstrassa $j = 1728\frac{4p^3}{4p^3+27q^2}$.

6.15 Zadania o przestrzeniach rzutowych:
http://www.mimuw.edu.pl/~aweber/zadania/gal2017gw/Przestrzenie_rzutowe-zadania.pdf .
Do zrobienia na ćwiczeniach: zadania 53.3, 53.4, 53.14, 53.16, 53.22(!!!).

GAL z ★ 2018

Konspekt wykładów: Formy 2-liniowe [Kos roz.1 §4], [Tor VII]

19.4.2018

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Formy symetryczne 2-liniowe - krótki wstęp do diagonalizacji.

1.1 $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ jest formą 2-liniową, jeśli:

- $\phi(a\alpha + b\beta, \gamma) = a\phi(\alpha, \gamma) + b\phi(\beta, \gamma)$
- $\phi(\gamma, a\alpha + b\beta) = a\phi(\gamma, \alpha) + b\phi(\gamma, \beta)$

1.2 Forma 2-liniowa jest symetryczna gdy $\phi(\alpha, \beta) = \phi(\beta, \alpha)$.

W tym wykładzie rozważamy tylko formy symetryczne 2-liniowe nad ciałem charakterystyki $\neq 2$.

1.3 Gdy $V = \mathbb{K}^n$ forma symetryczna 2-liniowa zadaje formę kwadratową $q(\alpha) = \phi(\alpha, \alpha)$. Mamy

$$\phi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta)).$$

Zatem forma kwadratowa wyznacza formę 2-liniową.

1.4 Macierz formy 2-liniowej w bazie $\mathcal{A}$

$$M(\phi)_{\mathcal{A}} = \{\phi(\alpha_i, \alpha_j)\}_{i=1\ldots n,\ j=1\ldots n}$$

1.5 Jeśli forma kwadratowa od n zmiennych jest postaci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i<j} b_{i,j} x_i x_j$$

to macierz formy 2-liniowej w bazie standardowej ma wyrazy

$$m_{i,i} = a_i, \qquad m_{i,j} = m_{j,i} = \tfrac{1}{2} b_{i,j}$$

1.6 Jeśli $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ to

$$M(\phi)_{\mathcal{B}} = C^T \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}} \cdot C$$

1.7 Relacja kongruencji macierzy $M \sim C^T M C$.

1.8 Forma standardowego iloczynu skalarnego, forma hiperboliczna

1.9 W $\mathbb{C}^2$ forma standardowego iloczynu skalarnego jest hiperboliczna w bazie

$$\alpha_1(i, 1), \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}(-i, 1).$$

1.10 Zakładamy, że $\dim V < \infty$. Forma jest niezdegenerowana gdy

$$\forall w \in V \; w \neq 0 \; \exists v \in V \; \phi(v, w) \neq 0$$

Oznacza to, że przekształcenie

$$\phi^{\#} : V \to V^*$$

$$w \mapsto \phi(-, w)$$

(tzn $\phi^{\#}(w)(v) := \phi(v, w)$) jest monomorfizmem. Zatem jest izomorfizmem, gdyż zakładamy, że $\dim V < \infty$.

1.11 Dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni.

$$\dim W + \dim W^{\perp} \geq \dim V.$$

Gdy ϕ jest niezdegenerowana to mamy równość.
Dow: $W^{\perp}$ jest zdefiniowana przez układ równań zadany funkcjonałami $\phi^{\#}(\alpha_i)$, gdzie α_i jest bazą W.

1.12 Jeśli $\phi_{|W \times W}$ jest niezdegenerowana, to $V = W \oplus W^{\perp}$.

1.13 Diagonalizacja formy 2-liniowej: Istnieje baza, w której $M(\phi)$ jest diagonalna.
Dowód 1: Stowarzyszoną formę kwadratową diagonalizujemy metodą Lagrange'a.

Dowód 2: Jeśli dla wszystkich α mamy $\phi(\alpha, \alpha) = 0$, to $\phi = 0$. W przeciwnym razie bierzemy $\alpha_1 = \alpha$ taki, że $\phi(\alpha, \alpha) \neq 0$ i przyjmujemy $W := lin(\alpha)$. Rozkładamy $V = W \oplus W^{\perp}$ i postępujemy indukcyjnie.

1.14 Metoda Jacobiego: jeśli wyznaczniki kolejnych minorów macierzy M są równe $\Delta_i \neq 0$, to macierz M jest kongruenta z diagonalną $diag(\Delta_1/\Delta_0, \ldots, \Delta_i/\Delta_{i-1}, \ldots, \Delta_n/\Delta_{n-1})$. (Przyjmujemy $\Delta_0 = 0$.)

2 Formy 2-liniowe

Przekształcenia dwuliniowe $\phi : V_1 \times V_2 \to V_3$. Przykłady:
– $V \times V^* \to \mathbb{K}$,
– A algebra nad $\mathbb{K}$, mnożenie:$A \times A \to A$
  – np, $A = L(V, V)$,
  – np. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{C}$.
– składanie przekształceń $L(W_1, W_2) \times L(W_2, W_3) \to L(W_1, W_3)$,
– mnożenie funkcji spełniających różne warunki, np $C_0^{\infty}(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$.

2.1 Ogólniej: rozważa się przekształcenia wieloliniowe $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$, np $\det : V^n \to \mathbb{K}$.

2.2 Przykład: Dane $1 < p < \infty$, niech ℓ^p oznacza zbór ciągów sumowalnych w p-tej potędzie (tzn $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty$). Dla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mamy $\ell^p \times \ell^q \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $\phi((a_i), (b_j)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_j$ (zbieżność wynika z nierówności Höldera).

2.3 Indukowane przekształcenie $\phi^{\#} : V_2 \to V_1^*$ zadane wzorem $\phi^{\#}(w) = \phi(-, w)$. W bazach: $M(\phi^{\#})_B^{A^*} = M(\phi)_{A,B}$.
Oczywiście też można zdefiniować ${}^{\#}\phi : V_1 \to V_2^*$ zadane wzorem ${}^{\#}\phi(v) = \phi(v, -)$.

2.4 Jeśli $V_1 = V_2 = V$, to $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ nazywamy formą dwuliniową.

2.5 Forma dwuliniowa $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ jest niezdegenerowana jeśli: $M(\phi)$ jest macierzą niezdegenerowaną.

2.6 Mamy następujące charakteryzacje form niezdegenerowanych:
(Definicja) $\forall w \in V\ w \neq 0\ \exists v \in V\ \phi(v, w) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ indukowane przekształcenie $\phi^{\#} : V \to V^*$ zadane wzorem $\phi^{\#}(w) = \phi(\,\cdot\,, w)$ jest monomorfizmem
$\Leftrightarrow$ indukowane przekształcenie $\phi^{\#} : V \to V^*$ zadane wzorem $\phi^{\#}(w) = \phi(\,\cdot\,, w)$ jest izomorfizmem
$\Leftrightarrow$ macierz $M(\phi)$ niezdegenerowana.
$\Leftrightarrow$ macierz $M(\phi)^T$ niezdegenerowana.
$\Leftrightarrow$ indukowane przekształcenie ${}^{\#}\phi : V \to V^*$ zadane wzorem ${}^{\#}\phi(v) = \phi(v, \cdot)$ jest izomorfizmem
$\Leftrightarrow \forall v \in V\ w \neq 0\ \exists w \in V\ \phi(v, w) \neq 0$

2.7 Gdyby rozważać formę $\phi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ dla $\dim V_1 \neq \dim V_2$ lub $\dim V_1 = \dim V_2 = \infty$, to powyższe równoważności nie są prawdziwe.

Dalej zakładamy $char(\mathbb{K}) \neq 2$**,** $\dim V < \infty$

2.8 Formy symetryczne i antysymetryczne: $V_1 = V_2 = V$, $V_3 = \mathbb{K}$, $\phi(v, w) = \pm\phi(w, v)$

2.9 Przykłady:
– $\ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum |a_n|^2 < \infty\}$
– $V = C([0, 1])$, dana funkcja $\rho(x) \in V$ (gęstość) $\phi_\rho(f, g) = \int_0^1 \rho(x)f(x)g(x)dx$ – symetryczna
– V tjw, dane $x_0 \in [0, 1]$, $\phi_{\delta_{x_0}}(f, g) = f(x_0)g(x_0)$
– $V = C_0^1(\mathbb{R})$: $\phi(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx$ – antysymetryczna.
– $\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$

2.10 Podprzestrzenie izotropowe (W jest izotropowa jeśli $\phi_{|W} = 0$). Dla formy symetrycznej zbór wektorów izotropowych jest kwadryką.
Dla formy antysymetrycznej ($char\mathbb{K} \neq 2$) każdy wektor jest izotropowy.

2.11 Niech ϕ będzie symetryczną lub antysymetryczną formą dwuliniową. Dopełnienie podprzestrzeni W ortogonalne w obu przypadkach oznaczamy przez $W^{\perp_\phi}$ lub $W^\perp$.

2.12 Dla każdej 2-liniowej symetrycznej bądź antysymetrycznej formy mamy:
– $\{0\}^\perp = V$,
– $W \subset (W^\perp)^\perp$ i równość zachodzi np gdy $\dim V < \infty$ i ϕ jest niezdegenerowana

2.13 (Kontr)przykład: Istnieje $W \subsetneq V$, $W^\perp = \{0\}$. Np. $V = \ell^2$, W=ciągi p.w. równe 0.

2.14 Dana jest dwuliniowa forma (V, ϕ) symetryczna lub antysymetryczna, $A, B, W \subset V$
– $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$
– gdy $\dim(V) < \infty$, to $\dim(V) \leq \dim(W) + \dim(W^\perp)$ (bo $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(\phi^\#(W)) \geq \dim(V) - \dim(W)$).

2.15 Dla niezdegenerowanej ($\dim(V) < \infty$) formy mamy,
– $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$
– $W = (W^\perp)^\perp$

2.16 – $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ (zawsze)
– $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$ jeśli $\dim V < \infty$ i forma jest niezdegenerowana

2.17 Ćwiczenie. Udowodnić analogiczne własności dla przekształcenia dwuliniowego. $\phi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ używając pojęcia anihilatora: dla $A \subset V_1$ definiujemy $anh(A) = \{w \in V_2 \,|\, \forall v \in A \ \phi(v, w) = 0\}$.

2.18 Rozkład przestrzeni na sumę prostą ortogonalną $A \overset{\perp}{\oplus} B$ (oznaczaną też $V = A \dot{\perp} B$).

2.19 Każdą przestrzeń z symetryczną bądź antysymetryczną formą 2-liniową można przedstawić jako $V = U \overset{\perp}{\oplus} W$, gdzie U jest całkowicie zdegenerowana (tzn $\phi_{|U} = 0$), oraz W jest niezdegenerowana. Przedstawienie to jest jednoznaczne w następującym sensie: Jeśli $V = U \overset{\perp}{\oplus} W = U' \overset{\perp}{\oplus} W'$, to $U = U'$ oraz istnieje izomorfizm $f : W \to W'$ taki, że dla $v, w \in W$ mamy $\phi(v, w) = \phi(f(v), f(w))$.
Dow: $U = V^\perp$, $W \simeq V/U$.

2.20 O relacji **kongruencji** c.d.:
– Każda macierz symetryczna jest kongruentna do macierzy diagonalnej.
– Jeśli $A \sim A'$ i $B \sim B'$ to $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$
– Macierz (a) jest kongruentna do $(k^2 a)$ dla $k \neq 0$.
– Jeśli $a + b \neq 0$, to macierz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ jest kongruentna do $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & ab(a+b) \end{pmatrix}$.

2.21 Ćwiczenie (być może trudne): sklasyfikować formy dwuliniowe symetryczne $\mathbb{Q}^2$. Które macierze diagonalne 2×2 są kongruentne do macierzy jednostkowej?

(Zainteresowanym tą tematyką polecam książkę J. Milnor, D. Husemoller *Symmetric bilinear forms.*), p.87.

2.22 W poprzednim wykładzie udowodniliśmy dla formy symetrycznej, że istnieje baza V, w której $M(\phi)$ jest diagonalna.

2.23 Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to istnieje baza, w której macierz danej formy jest diagonalna z 1, –1 i 0 na przekątnej.

2.24 Twierdzenie o bezwładności: Jeśli ciało jest uporządkowane i każdy element > 0 jest kwadratem (np. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), to każda macierz symetryczna jest kongruentna do diagonalnej, a na przekątnej są tylko 1, –1 i 0. Ilości „1”, „0” i „–1” są jednoznacznie wyznaczone.
Dowód dla formy niezdegenerowanej: jeśli $k + l = k' + l' = n$ to albo $k + l' > n$ lub $k' + l > n$.

2.25 Równoważne sformułowanie: $(V, \phi) \simeq [\,1\,]^k \overset{\perp}{\oplus} [-1\,]^\ell \overset{\perp}{\oplus} [\,0\,]^m$.

2.26 W Twierdzeniu o bezwładności liczby k, l, m:
– liczba k jest róna wymiarowi maksymalnej podprzestrzeni, na której ϕ jest dodatnio określona,
– liczba l jest róna wymiarowi maksymalnej podprzestrzeni, na której ϕ jest ujemnie określona,
– $m = \dim(V^{\perp})$.

2.27 Liczba $\sigma = k - l$ nazywana jest sygnaturą formy. Sygnatura oraz rząd $r(M(\phi))$ wyznaczają typ formy z dokładnością do izomorfizmu liniowego. Innymi słowy wyznaczają klasę kongruencji $M(\phi)$. (To wszystko jest prawda nad $\mathbb{R}$. Nad $\mathbb{Q}$ jest o wiele ciekawiej.)

3 Formy dodatnio określone, ortogonalizacja Grama-Schmidta, formy symplektyczne

Formy symplektyczne i diagonalizacja form symetrycznych [Kos roz.1 §4], [Tor VII]

3.1 Formy nad $\mathbb{R}$ określone dodatnio i ujemnie.

3.2 Jeśli forma jest dodatnio okrześlona, to $\det(M(\phi)) > 0$ (w dowolnej bazie. Dotyczy to też dowolnego minora głównego (tzn symetrycznie położonego).

3.3 Kryterium Sylwestera. Forma $(\mathbb{R}^n, \phi)$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy wyznaczniki kolejnych minorów głównych $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ są dodatnie. To jest proste zastosowanie metody Jacobiego.

3.4 Forma $(\mathbb{R}^n, \phi)$ jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy wyznaczniki kolejnych minorów głównych $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ mają naprzemienne znaki -+-+...$(-1)^n$.

3.5 Ćwiczenie: wyznaczniki kolejnych minorów mają znaki jak poniżej. Jakiej postaci może być forma?
a) $+\,0\,-$, b) $+\,+\,0\,-$, c) $+\,-\,0\,+$, d) $+\,+\,0\,-$, e) $+\,-\,0\,-$, itp.

3.6 Ćwiczenie: Czy możemy otrzymać ciąg znaków $+\,+\,0\,+$?

3.7 Metoda Jacobiego jeszcze raz: załóżmy, że dla macierzy $M(\phi)$ minory główne Δ_1, Δ_2,... Δ_n są różne od zera. Wtedy istnieje baza $\mathbb{K}^n$, w której ϕ ma postać diagonalną z liczbami Δ_1, Δ_2/Δ_1,... Δ_n/Δ_{n-1} na przekątnej.
Dokładniej: dana baza α_1, α_2, ... α_n. Szukamy indukcjnie bazy spełniającej
1) $\beta_1 = \alpha_1$,
2) $\beta_2 = \alpha_2 - c_{21}\beta_1$, $\phi(\beta_2, \beta_1) = 0$, tzn β_2 =rzut α_2 na $\alpha_1^{\perp} = \beta_1^{\perp}$
3) $\beta_3 = \alpha_3 - c_{31}\beta_1 - c_{32}\beta_2$, $\phi(\beta_3, \beta_1) = 0$, $\phi(\beta_3, \beta_2) = 0$, tzn β_3 =rzut α_3 na $lin(\alpha_1, \alpha_2)^{\perp} = lin(\beta_1, \beta_2)^{\perp}$
itd. Współczynniki c_{ij} $(i > j)$ są równe $\phi(\alpha_i, \beta_j)/\phi(\beta_j, \beta_j)$. Z warunku $\Delta_j \neq 0$ wynika, że $\phi(\beta_j, \beta_j) \neq 0$.

3.8 Załóżmy, że ϕ jest formą symetryczną dwuliniową dodatnio określona na $\mathbb{R}$. Wtedy istnieje baza taka, że $M(\phi) = I$. Taka baza nazywa się ortonormalna.

3.9 Jeli ϕ jest standardową formą symetryczną dodtnio określoną w $\mathbb{R}^n$, (tzn $M(\phi)_{st} = I$), to baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $B^T B = I$, gdzie $B = M(Id)_{\mathcal{B}}^{st}$. Zbiór takich macierzy jest oznaczny przez $O(n)$ to jest podgrupa w $GL_n(\mathbb{R})$.

3.10 Diagonalizacja formy metodą Jacobiego w przypadku formy dodatnio określonej nazywa się ortogonalizacją Grama-Schmidta. W efekcie znajdujemy bazę ortogonalną, a później przeskalowując wektory bazę ortonormalną.

3.11 Dana baza $\mathcal{A}$. Ortogonalizacja G-S: $\beta_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\alpha_i,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j$, $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{(\beta_i,\beta_i)}}\beta_i$ (piszemy (α,β) zamiast $\phi(\alpha,\beta)$). Otrzymujemy procedurę

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & & \mathcal{B} & & \mathcal{C} \\ \text{dowolna baza} & \rightsquigarrow & \text{baza ortogonalna} & \rightsquigarrow & \text{baza ortonormalna.} \end{array}$$

gdzie $M(Id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ jest górnotrójkątna z jedynkami na przekątnej (bo $M(Id)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ jest taka), $M(Id)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ jest diagonalna, $M^{st}_{\mathcal{C}} \in O(n)$.

3.12 Przyjmując:

$$G = M^{st}_{\mathcal{A}}(I), \quad K = M^{st}_{\mathcal{C}}(I), \quad A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(I), \quad N = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(I)$$

traktujemy ortogonalizację G-S jako algorytm pozwalający przedstawić dowolną macierz odwracalną G w postaci

$$G = K \cdot A \cdot N\,,$$

gdzie $K \in O(n)$, macierz A jest diagonalna z dodatnimi wyrazami, N górnotrójkątna z jedynkami na przekątnej. To się nazywa rozkładem Iwasawy (patrz np Wikipedia ,,Iwasawa decomposition" aby zobaczyć uogólnienia.)

3.13 Przykład:
$\alpha_1 = (3,4)$, $\alpha_2 = (1,1) \rightsquigarrow \beta_1 = (3,4)$, $\beta_2 = (\frac{4}{25}, -\frac{3}{25}) \rightsquigarrow \gamma_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $\gamma_2 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{25} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.14 Ćwiczenie. Rozkład Iwasawy KAN jest jednoznaczny. Mamy bijekcję

$$O(n) \times (\mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \to GL(\mathbb{R}^n)\,,$$

$$(K, A, N) \mapsto K \cdot A \cdot N\,.$$

(Tu $(\mathbb{R}_+)^n$ utożsamiamy ze zbiorem macierzy z wyrazami dodatnimi na przekątnej, $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ z macierzami górnotrójkątnymi z jedynkami na przekątnej.) Na przykład

$$GL(\mathbb{R}^2) \quad \simeq \quad O(2) \times (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R}\,.$$

3.15 Ćwiczenie: Pokazać

$$SO(\mathbb{R}^3) \quad \simeq \quad \mathbb{P}^3(\mathbb{R})\,.$$

gdzie $SO(n) = \{\mathbb{K} \in O(n) \mid det(K) = 1\}$.

Formy symplektyczne

3.16 Załóżmy, że ϕ jest antysymetryczna oraz niezdegenerowana, $\dim(V) < \infty$. (Mówimy, że ϕ jest symplektyczna.) Wtedy wymiar V jest parzysty oraz istnieje baza V: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ taka, że macierz formy w tej bazie jest blokowa $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Ta baza nazywa się bazą symplektyczną lub Darboux.

3.17 Wniosek z istnienia bazy symplektycznej: każda macierz antysymetryczna i niezdegenerowana jest kongruentna do macierzy $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, czyli postaci $C^T JC$.

3.18 Wniosek: wyznacznik macierzy antysymetrycznej jest kwadratem. Z ćwiczeń wiemy, że istnieją formuły wielomianowe pozwalające wyciągnąć pierwiastek z wyznacznika: np

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix} = (x_{12}\, x_{34} - x_{13}\, x_{24} + x_{14}\, x_{23})^2 \,.$$

(patrz Pfaffian).

4 kwadryki afiniczne

Kwadryki [Kos roz.5 §2-4, *tam jest bardzo dokładnie*]

4.1 Zbiory algebraiczne w $\mathbb{K}^n$ to zbiory opisane układami równań wielomianowch.

4.2 Przykąd: okrąg, hiperbola, parabola w $\mathbb{R}^2$.

4.3 Kwadryki afiniczne: Każda kwadryka afiniczna w $\mathbb{R}^n$ może być przekształceniem afinicznym sprowadzona do kwadryki opisanej równaniem:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{j=k+1}^{k+\ell} x_j^2 = \delta$$

$k + \ell \leq n$, $\delta = 0$ lub 1 albo

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{j=k+1}^{k+\ell} x_j^2 = x_{k+\ell+1}$$

$k + \ell < n$.

4.4 Afiniczne typy równoważności kwadryk w $\mathbb{R}^3$ i rzutowe typy. Zakładając, że po ujednorodnieniu otrzymujemy formę niezdegenierowaną mamy następujące typy:
- elipsoida (sfera) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, typ rzutowy $+++-$
- hiperboloida jednopowłokowa $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, typ rzutowy $++--$
- hiperboloida dwupowłokowa $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, typ rzutowy $+++-$
- paraboloida eliptyczna $x^2 + y^2 = z$, typ rzutowy $+++-$
- paraboloida hiperboliczna $x^2 - y^2 = z$, typ rzutowy $++--$
- zbiór pusty $x^2 + y^2 + z^2 = -1$, typ rzutowy $++++$

4.5 Po ujednorodnieniu zdegenerowana forma:
- $x^2 + y^2 + z^2 = 0$,,gruby punkt", typ rzutowy +++0
- $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ stożek, typ rzutowy ++-0
- itd

4.6 kwadryki w $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

4.7 Ćwiczenie:
– Wszystkie niezdegenerowane kwadryki w $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ są równoważne.
– Podać typy równoważności niezdegenerowanych kwadryk w $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

4.8 Przkłady. Hiperbola i parabola w $\mathbb{R}^2$: ich rzutowa równoważność z okręgiem, przecięcie z prostą w ∞.

4.9 Ćwiczenie: niezdegenerowaną kwadrykę typu $++--$ w $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (tzn rzutowe domknięcie paraboloidy hiperbolicznej lub hiperboloidy jednopowłokowej) można utożsamić z torusem $S^1 \times S^1$. (Wskazówka: patrz prostokreślność, odwzorowanie Segre.)

Współczynniki wektora w bazie ortogonalnej

4.10 Przypuśćmy, że baza niezdegenerowanej formy 2-liniowej $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ jest ortogonalna. Wtedy dla każdego wektora α mamy

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi(\alpha, \beta_i)}{\phi(\beta_i, \beta_i)} \beta_i$$

4.11 Krótsza suma

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\phi(\alpha, \beta_i)}{\phi(\beta_i, \beta_i)} \beta_i$$

to rzut α na $lin(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ wzdłuż $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n$.

4.12 W przestrzeni nieskończenie wymiarowej często nie ma bazy ortogonalnej (tylko są układy zupełne, t.ż. $\left(lin\{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right)^{\perp} = 0$. Ale można rozważać rzut α na $lin(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ wzdłuż $lin(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)^{\perp}$.

4.13 Ważny przykład: $V = C(S^1)$ z iloczynem skalarnym $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, podprzestrzeń $W =$ Wielomiany trygonometryczne. Bazą ortogonalną W są funkcje 1, $\sin(nt)$, $\cos(nt)$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Ponadto $W^{\perp} = \{0\}$ (patrz tw Stone'a-Weierstrassa) Otrzymujemy przykład **zupełnego układu wektorów**, który nie jest bazą w sensie algebry liniowej.

4.14 Z każdą funkcją całkowalną (w sensie Lebesgue'a) stowarztszamy szereg

$$a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nt) + c_n \sin(nt)\,,$$

gdzie $a = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)dt$, $c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)dt$. Badaniem takich szeregów zajmuje się analiza fourierowska. Co prawda nie musi być zbieżny punktowo, ale jest zbierzny według mairy. Ponadto gdy funkcja jest klasy C^1, to mamy zbieżność jednostajną.

GAL z ★ 2018

31.5.2018

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

[Kos roz. 3], [Tor V].

1 Iloczyn skalarny, przestrzenie euklidesowe [Kos roz 3, §1]

1.1 Ortogonalizacja Grama-Schmidta w części o formach dwuliniowych.

1.2 Iloczyn skalarny $(-,-) : V \times V \to \mathbb{R}$

1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

2) $(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2, \beta) = (a_1\alpha_1, \beta) + (a_2\alpha_2, \beta)$

3) $(\alpha, \alpha) \geq 0$ oraz $(\alpha, \alpha) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$

1.3 Norma, formalne własności normy:

A) $||\alpha|| \geq 0$ oraz $||\alpha|| = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$

B) $||a\alpha|| = |a|\,||\alpha||$

C) $||\alpha + \beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||$ (nierówność trójkąta).

1.4 Jeśli dany jest iloczyn skalarny, to definiujemy $||\alpha|| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$.

1.5 Są normy nie pochodzące od iloczynów skalarnych, np w $\mathbb{R}^n$

- $||(x_1, x_2, \ldots, x_n)||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ dla $1 \leq p < \infty$,
- $||(x_1, x_2, \ldots, x_n)||_\infty = \sup_i\{|x_i|\}$.

1.6 Własność C) jest równoważna nierówności Schwartza: $|(\alpha, \beta)| \leq ||\alpha|| \cdot ||\beta||$.

Dow: Rozważyć funkcję kwadratową $t \mapsto ||\alpha + t\beta||^2 \geq 0$, dla której wyróżnik jest ≤ 0.

1.7 Ćwiczenie: Norma w przestrzeni ℓ^p, $p \neq 2$ nie pochodzi od iloczynu skalarnego.

1.8 Definicja $\cos(\measuredangle(\alpha, \beta))$ i $|\sin(\measuredangle(\alpha, \beta))|$.

1.9 Twierdzenie kosinusów $||\alpha + \beta||^2 = ||\alpha||^2 + 2\cos\measuredangle(\alpha, \beta))||\alpha||\,||\beta|| + ||\beta||^2$.

1.10 Jeśli baza $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ jest ortonormalna to dla dowolnego $\beta \in V$

$$\beta = \sum_{i=1}^n (\beta, \alpha_i)\alpha_i.$$

a gdy jest bazaą ortogonalną to

$$\beta = \sum_{i=1}^n \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i.$$

1.11 Każdy układ niezerowych wektorów parami ortogonalnych można uzupełnić do bazy ortogonalnej w przestrzeni skończenie wymiarowej.

(Powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe w przestrzen nieskończenie wymiarowej, patrz układy zupełne.)

1.12 Ważny przykład: $V = C(S^1)$ z iloczynem skalarnym $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, podprzestrzeń $W =$ Wielomiany trygonometryczne. Bazą ortogonalną W są funkcje 1, $\sin(nt)$, $\cos(nt)$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Ponadto $W^\perp = \{0\}$ (patrz tw Stone'a-Weierstrassa) Otrzymujemy przykład **zupełnego układu wektorów**, który nie jest bazą w sensie algebry liniowej.

1.13 Z każdą funkcją całkowalną (w sensie Lebesgue'a) stowarzyszamy szereg

$$a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nt) + c_n \sin(nt)\,,$$

gdzie $a = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)Sdt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)dt$, $c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)dt$. Badaniem takich szeregów zajmuje się analiza fourierowska. Co prawda nie musi być zbieżny punktowo, ale jest zbierzny według mairy. Ponadto gdy funkcja jest klasy C^1, to mamy zbieżność jednostajną.

1.14 Ćwiczenie: dany ciąg wektorów $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ w przestrzeni V z iloczynem skalarnym (skończony lub nie), $\beta \in V$. Załóżmy, że $(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$. Następujące waranki są równoważne:

- Jeśli dla każdego $i \in I$ mamy $(\alpha_i, \beta) = 0$ to $\beta = \mathrm{lin}\{\alpha_i \ : \ i\mathbb{I}\}^\perp$.
- $inf\{||\beta, \gamma|| \ : \ \gamma \in \mathrm{lin}\{\alpha_i \ : \ i\mathbb{I}\} = 0$ (β leży w domknięciu $\mathrm{lin}\{\alpha_i \mid i \in I\}$).

1.15 W szczególności: W przestrzeniach nieskończonego wymiaru rozważamy układy zupełne $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \}$, tzn takie, że

$$\forall i \in \mathbb{N} \ \ (\beta, \alpha_i) = 0 \ \Rightarrow \ \beta = 0\,.$$

(Np wektory $\varepsilon_i \in \ell^2$.)

Z (1.14) wynika, że układ liniowo zupełny rozpina podprzestrzeń, która jest gęsta w V (w sensie topologicznym).

1.16 Jeśli mamy zupełny układ wektorów ortogonalnych $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \} \subset V$ to z dowolnym $\beta \in V$ stowarzyszamy szereg

$$\beta \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i\,.$$

Problem zbieżności takich szeregów daleko wykracza poza zakres naszego wykładu.

1.17 Ćwiczenie: Inne przykłady ortonormalnych układów zupełnych.
a) wielomiany Legendra $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left((t^2-1)^n\right)$ ze względu na iloczyn skalarny $(f, d) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.
b) wielomian Czebyszewa T_n (Czebyszewa spełnia $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$) ze względu na iloczyn skalarny $(f, d) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.
c), d) ... wielomiany Hermite'a, wielomiany Laguerre'a ...
(to są zadania z analizy i nie będziemy ich robić).

1.18 Każdy układ niezerowych wektorów parami ortogonalnych, jest liniowo niezależny.

1.19 Wzór na rzut ortogonalny na $lin\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, dla układu wektorów ortogonalnych/ortonormalnych.

Objętość [Kos roz.4 §3.2,]

1.20 Objętość równoległościanu $Vol(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \sqrt{\det G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}$ gdzie $G_{i,j} = (\alpha_i, \alpha_j)$ (Jeśli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ są liniowozależne, to $\det G = 0$, w przeciwnym przypadku $\det G > 0$ bo to macierz iloczynu skalarnego w bazie α_i).

1.21 Dla $k = 2$ wzór na pole trójkąta $||\alpha_1|| \cdot ||\alpha_1|| \cdot |\sin(\measuredangle(\alpha_1, \alpha_2))|$.

1.22 Odległość $\alpha \in V$ od podprzestrzeni liniowej $W \subset V$ definiujemy jako $\min\{||\alpha - \beta|| \mid \beta \in W\}$. Minimum jest osiągnięte jeśli $\alpha = \gamma + \beta_0$, $\gamma \in W^\perp$ bo $||\alpha - \beta||^2 = ||\gamma + \beta_0 - \beta||^2 = ||\gamma||^2 + ||\beta_0 - \beta||^2$.

1.23 Objętość spełnia
(i) $Vol(\alpha_1) = ||\alpha_1||$
(2) $Vol(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = Vol(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}) \cdot h$ gdzie h jest odległością α_k od $lin\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}\}$.

1.24 Dla $k = n$ dostajemy $Vol(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = |\det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]|$. Stąd interpretacja geometryczna wyznacznika.

Iloczyn wektorowy

1.25 Iloczyn wektorowy: Dane $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \in V$, $\dim(V) = n$. Definiujemy funkcjonał

$$\beta \mapsto \det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta].$$

Ponieważ $V \simeq V^*$ za pomocą iloczynu skalarnego, więc istnieje $\gamma \in V$ taki, że dla każdego β

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta] = (\gamma, \beta).$$

Definiujemy $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \cdots \times \alpha_{n-1} := \gamma$.

1.26 Własności
(i) $\gamma \perp lin\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$
(ii) $|\gamma| = Vol(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$
(iii) jeśli wektory $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ są liniowo niezależne, to baza $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma$ jest dodatniozorientowana.
Te własności definiują γ.

1.27 Dla $n = 3$ mamy dobrze znany iloczyn zadany wzorem ze szkoły:

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

1.28 Z definicji w $\mathbb{R}^3$ mamy

$$(\alpha \times \beta, \gamma) = (\gamma \times \alpha, \beta) = (\beta \times \gamma, \alpha) = \det[\alpha, \beta, \gamma].$$

1.29 $||a \times b||^2 + (a, b)^2 = ||a||^2 ||b||^2$.

1.30 Ćw: definiujemy działanie w $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

$$(a, \alpha) \odot (b, \beta) := (ab - \langle a, b \rangle \ , \ a\beta + b\alpha + \alpha \times \beta).$$

Wykazać, że to działanie jest łączne.

2 Przekształcenia zachowujące iloczyn skalarne, izometrie

2.1 Metryka w zbiorze X, czyli odległość pomiędzy punktami: $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$:
$d(x, y) = 0 \iff x = y$
$d(x, y) = d(y, x)$
$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

2.2 Pojęcie izometrii i izometrycznego włożenia.

2.3 Przykład: Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią liniową, a $\{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,k}$ jej bazą ortonormalną. Symetria względem W wzdłuż $W^\perp$ jest zadana wzorem

$$S_W(\beta) = \beta - 2\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i, \beta)\alpha_i\,.$$

2.4 Izometie. Niech $\dim E < \infty$. Poniższe warunki są równoważne:
1) $f : E \to E$ jest przekształceniem afinicznym, takim że $Df : TE \to TE$ zachowuje iloczyn skalarny.
2) $f : E \to E$ jest przekształceniem afinicznym zachowującym odległość,
3) f zachowuje odległość tzn $d(p, q) = d(f(p), f(q))$ (nie zakładamy afiniczności),

Dow 3)$\Longrightarrow$ 1): z lematu: $d(p, r) + d(r, q) = d(p, q)$ wtedy i tylko wtedy gdy $r = \frac{d(p,r)}{d(p,q)}p + \frac{d(r,q)}{d(p,q)}q$.

2.5 Ogólniej rozważa się izometryczne włożenia $f : F \to E$.

2.6 Przykłady. Przekształcenia liniowe: obroty, symetrie. Przekształcenia afiniczne – przesunięcia złożone z liniowymi izometriami.

2.7 Niech V będzie przestrzenią liniową, $\dim V < \infty$. Dla każdej izometrii liniowej $f : V \to V$ istnieje rozkład V na ortogonalną sumę prostą

$$V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} V_k\,,$$

oraz

- albo $\dim(V_i) = 2$ i $f_{|V_i}$ jest obrotem,
- albo $\dim(V_i) = 1$ i $f_{|V_i}$ jest symetrią lub identycznoącią.

2.8 Niech E będzie przestrzenią afiniczną, $\dim E < \infty$. Dla każdej izometrii (afinicznej) $f : E \to E$ istnieje rozkład E na produkt przestrzeni

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k\,,$$

$\dim(E_i) = 1$ lub 2 taki, że rozkład przestrzeni stycznych jest ortogonalny

$$TE = TE_1 \overset{\perp}{\oplus} TE_2 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} TE_k$$

oraz f jest produktem przekształceń $f_i : E_i \to E_i$, tzn

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_k(x_k))\,,$$

gdzie f_i jest przesunięciem, symetrią lub obrotem.

Dowód jest celem dalszej części wykładu. Zamiast twierdzenia dla przestrzeni rzeczywistej dowiedziemy diagonalizowalności izometrii liniwej w przestrzeni zespolonej i wywnioskujemy przypadek rzeczywisty.

2.9 Wniosek: Klasyfikacja izometrii $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

Przestrzenie unitarne [Kos roz 3, §2]

2.10 Iloczyn hermitowski to jest przekształcenie $\phi(-,-) : V \times V \to \mathbb{R}$ półtoraliniowe, hermitowsko symetryczne, dodatnio określone, tzn
1) $\phi(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = \phi(\alpha_1, \beta) + \phi(\alpha_2, \beta), \quad \phi(a\alpha, \beta) = a\phi(\alpha, \beta)$
2) $\phi(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = \phi(\alpha, \beta_1) + \phi(\alpha, \beta_2) \quad \phi(\alpha, a\beta) = \overline{a}\phi(\alpha, \beta)$
3) $\phi(\alpha, \beta) = \overline{\phi(\beta, \alpha)}$ (stąd $\phi(\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}$),
4) $\phi(\alpha, \alpha) \geq 0$ oraz $(\alpha, \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
Często jest oznaczana przez $H(v, w)$ lub $\langle\langle v, w\rangle\rangle$.

2.11 Jeśli $M = M(\varphi) = (\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j))$ macierz formy półtoraliniowej φ w bazie standardowej, to $\varphi(X, Y) = X^T M \overline{Y}$.

2.12 Ćwiczenie: czy φ zadane przez macierz $\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ jest iloczynem hermitowskim? Udowodnić kryterium Sylvestera dla form półtoraliniowych.

2.13 Standardowy iloczyn hermitowski $\langle\langle (a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)\rangle\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b}_j$.

2.14 Ortogonalizacja G-S w przestrzeni unitarnej:

$$\beta_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle\langle \alpha_i, \beta_j\rangle\rangle}{\langle\langle \beta_j, \beta_j\rangle\rangle} \beta_j \ ,$$

$$\gamma_i = \frac{1}{||\beta_i||} \beta_i$$

(uwaga na kolejność $\langle\langle \alpha_i, \beta_j\rangle\rangle$).

2.15 Jeśli V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$, to przez $V_{\mathbb{R}}$ oznaczamy ten sam zbiór z dziaąniem dodawania i mnożenia przez skalary rzeczywiste.

2.16 W przestrzeni $V_{\mathbb{R}}$ mamy naturalny endomorfizm J (mnożenie przez i) spełniający $J^2 = -Id$. Taki endomorfizm pozwala zdefiniować strukturę przestrzeni zespolonej na $V_{\mathbb{R}}$.

2.17 Jeśli

$$\langle\langle v, w\rangle\rangle = \psi(v, w) - i\omega(v, w)\,.$$

gdzie

$$\psi(v, w) = re\langle\langle v, w\rangle\rangle, \qquad \omega(v, w) = -im\langle\langle v, w\rangle\rangle$$

jest iloczynem hermitowskim na V, to na $V_{\mathbb{R}}$ forma $\psi(v, w)$ jest iloczynem skalarnym, a $\omega(v, w)$ jest formą symplektyczną. Obie te formy są J niezmiennicze, oraz $\omega(v, w) = \psi(Jv, w)$.

Uzupełnienie

2.18 Grupa unitarna $U(n) = \{A \in GL(\mathbb{C}^n) \,|\, A \cdot \overline{A}^T = I\}$. Piszemy też $A^* = \overline{A}^T$, wtedy dla $A \in U(n)$ mamy $A^{-1} = A^*$.

2.19 W grupie $GL(\mathbb{C}^n)$ mamy $GL(\mathbb{R}^n) \cap U(n) = O(n)$.

2.20 Z ortogonalizacji G-S mamy rozkład Iwasawy KAN dla macierzy zespolonych.

$$GL(\mathbb{C}^n) = U(n) \cdot (\mathbb{R}_+^*)^n \cdot \{\text{górnotrójkątne z jedynkami na przekątnej}\}.$$

Rozkład ten jest jednoznaczny.

3 Operatory w przestrzeniach z iloczynem hermitowskim, [Kos, roz.3 §3]

Zakładamy, że $\mathbb{C}^n$, rozważamy standardowy iloczyn hermitowski, $M(\varphi) = I$ oznaczany przez $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$. Zakładamy, że w bazie standardowej ma on postać standardową.

3.1 $A : V \to V$ jest operatorem unitarnym, jeśli zachowuje iloczyn hermitowski, tzn $\langle\langle A(\alpha), A(\beta)\rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \beta\rangle\rangle$ dla dowolnych wektorów $\alpha, \beta \in V$. Wtedy (gdy $\dim(V) < \infty$) mamy $A^* = A^{-1}$. We współrzędnych ortonormalnych: macierz operatora należy do $U(n)$.

3.2 Operator A jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy jest izometrią, tzn zachowuje $||\alpha|| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$.

3.3 Następujące warunki są równoważne.
1) $\forall \alpha, \beta \in V$ $\langle\langle A(\alpha), A(\beta)\rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \beta\rangle\rangle$ tzn. A zachowuje iloczyn hermitowski
2) $\forall \alpha \in V$ $||A(\alpha)|| = ||\alpha||$ tzn A zachowuje normę
3) Macierz operatora jest unitarna $A \in U(n)$, tzn $A^*A = I$.

3.4 Wartości własne operatora unitarnego mają moduł 1.

3.5 Przestrzenie własne są ortogonalne

3.6 Jeśli $W \subset V$ niezmiennicza, to $W^\perp$ też niezmiennicza.

3.7 Dla operatora unitarnego A istnieje baza unitarna, w której jego macierz jest diagonalna. W zapisie macierzowym: istnieje $C \in U(n)$ t.ż.

$$A = CDC^{-1}, \quad D = diag(e^{it_1}, e^{it_2}, \ldots, e^{it_n}).$$

3.8 Dla operatora ortogonalnego $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, istnieje baza ortonormalna taka, że $A = M(f)$ ma macierz blokowo-diagonalną z blokami 2×2 postaci $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ lub z blokami 1×1: (1) i (-1).

Dowód. Rozważamy przekształcenie unitarne $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ zadane przez tą samą macierz A. Istnieje baza unitarna złożona z wektorów własnych. Dla wartości własnej $\mu \notin \mathbb{R}$ zakładamy, że jeśli α jest wektorem bazowym, to $\overline{\alpha}$ też należy do bazy (ma on wartość własną $\overline{\mu}$). Bierzemy bazę rzeczywistej podprzestrzeni $\mathbb{R}^n \cap lin\{\alpha, \overline{\alpha}\}$ złożoną z wektorów $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \overline{\alpha})$, $\beta_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\alpha - \overline{\alpha})$. Otrzymujemy bazę ortogonalną.

3.9 Ćwiczenie: Grupę izometrii zachowujących orientację w $\mathbb{R}^n$ oznaczamy przez $SO(n)$. Znaleźć ciągłą bijekcję $SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3$.

3.10 Ćwiczenie: Izometria $\mathbb{R}^4$ dana jest przez macierz

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Znaleźć blokową diagonalizację.

Izometrie afiniczne

3.11 Przypomnienie: Każde izomorfizm afiniczny $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ można przedstawić jako złożenie

$$f = Tr_\alpha \circ Df = Df \circ Tr_\beta,$$

gdzie Tr_α oznacza przesunięcie. Ponadto $f(\gamma) = \alpha + Df(\gamma) = Df(\beta + \gamma)$, więc $\alpha = Df(\beta)$.

3.12 Dowód tw (2.8), tzn dla każdej izometrii $f \in Aff(\mathbb{R}^n)$ znajdujemy rozkład na produkt $\mathbb{R}^n = \prod V_i$ (i odpowiadający mu rozkład na ortogonalną sumę prostą przestrzeni stycznych), gdzie $\dim V_i \leq 2$, oraz f zachowuje ten rozkład. W każdej V_i izometria f jest albo obrotem, albo symetrią, albo przesunięciem.

3.13 Ćwiczenie: Każda izometria przestrzeni euklidesowej jest postaci $Tr_\alpha g = gTr_\alpha$, gdzie α jest wektorem stałym dla Df, oraz przekształcenie g ma punkt stały. Powyższy rozkład jest jednoznaczny.

3.14 Ćwiczenie: Wiemy, że

$$Df = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f([0,0,0]) = [-1,-7,2].$$

Co to za przekształcenie?

1. Znaleźć wektor stały α dla Df, czyli kierunek osi obrotu.
2. Rozłożyć $(-1,-7,2) = a\alpha + \beta$, gdzie $\beta \perp \alpha$.
3. Znaleźć punkty stałe przekształcenia $Tr_\beta \circ Df$; to będzie oś obrotu.

Odpowiedź $f = Tr_{a\alpha} \circ$(obrót wokól osi znalezionej w 3.).

3.15 Klasyfikacja izometrii afinicznych $\mathbb{R}^3$ (symetrie, obroty, obroty z odbiciem, przesunięcia, ruch śrubowy, obrót z odbiciem, symetrie z poślizgiem).

4 Operatory samasprzężone, klasyfikacja kwadryk [Kos roz.4 §3]

Operatory sprzężone

4.1 Dane jest przekształcenie linowe $\varphi : V \to V$ przestrzeni z iloczynem hermitowskim/skalarnym. Mówimy, że $\psi : V \to V$ jest sprz'eżone do φ gdy dla każdej pary wektorów $\alpha, \beta \in V$ mamy

$$\langle\langle \varphi(\alpha), \beta \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \psi(\beta) \rangle\rangle.$$

– jeśli ψ_1 i ψ_2 są sprzężone do φ, to $\psi_1 = \psi_2$.
– jeśli $\dim V < \infty$, to operator sprzężony ψ istnieje oraz gdy $M(\varphi)$ jest macierzą φ w bazie unitarnej, to

$$M(\psi) = \overline{M(\varphi)}^T =: M(\varphi)^*.$$

Oznaczenie: $\psi = \varphi^*$.

4.2 Dla operatora w przestrzeni rzeczywistej definiujemy operator sprzężony używając iloczynu skalarneg. Związek z przekształceniem sprężonym jest następujący: Jeśli $\dim V < \infty$, to iloczyn skalarny zadaje izomorfizm $\Theta : V \to V^*$. Utożsamiając te dwie przestrzenie oba pojęcia sprzężoności się pokrywają:

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{\Theta} & V^* & \\ \text{(sensie iloczynu skalarnego) } \phi^* & \downarrow & & \downarrow & \phi^* \text{ (w sensie przekształcenia przestrzeni sprzężonych)} \\ & V & \xrightarrow{\Theta} & V^* & \end{array}$$

4.3 Ćwiczenie: niech $V = C(S^1)$, $(f, g) = \int_{S^1} f(x)g(x)dx$, $\varphi(f) = f(a)\mathbb{1}$, gdzie $\mathbb{1}$ jest funkcją stale równą 1 oraz $a \in S^1$. Wykazać, że φ nie dopuszcza żadnego operatora sprzężonego do niego.

4.4 Ćwiczenie: w powyższej przestrzeni niech $\frac{d}{dx}$ będzie operatorem różniczkowania. Speawdzić, że $\left(\frac{d}{dx}\right)^* = -\frac{d}{dx}$

Operatory samosprzężone

4.5 Operator φ jest samosprzężony (hermitowski), jeśli $\varphi = \varphi^*$. We współrzędnych ortonormalnych: macierz operatora jest symetryczna (ze sprzężeniem).

4.6 Wartości własne są rzeczywiste

4.7 Przestrzenie własne są ortogonalne

4.8 Jeśli W jest podprzestrzenią φ-niezmenniczą, to $W^\perp$ też.

4.9 Twierdzenie spektralne. Jeśli φ jest operatorem samosprzężonym w przestrzeni skończonego wymiaru, to istnieje baza unitarna, w której operator ma macierz diagonalną, o wyrazach rzeczywistych. Rozkład

$$V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\varphi)} V_\lambda \,,$$

jest ortogonalny.

4.10 Gdy przestrzeń jest rzeczywista, to istnieje baza ortonormalna, w której operator jest diagonalny.

4.11 Ćwiczenie: złożenie operatorów samosprężonych jest smosprzężone wtedy i tylko wtedy gdy są one przemienne.

4.12 Każda rzeczywista macierz symetryczna φ da się zapisać jako CDC^{-1}, gdzie $C \in O(n)$, tzn $C^{-1} = C^T$, a D jest diagonalna.
(Zatem zarówno $A\varphi$ jest podobne jak i kongruentne do diagonalnej.)

4.13 To samo dla zespolonych: Jeśli $\varphi = \varphi^*$, to CDC^{-1}, gdzie $C \in U(n)$.

4.14 W przestrzeni nieskończenie wymiarowiej wiemy jedynie, że przestrzenie własne operatora samosprzężonego są ortogonalne.

4.15 Niech $V = C^\infty(S^1)$. Operator drugiej pochodnej $\varphi(f) = \frac{d^2}{dx^2}$ jest samosprzężony. Spektrum jest równe $\{-k^2 \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Udowodnić

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in spec(\varphi)} V_\lambda \right)^\perp = \{0\}\,.$$

4.16 Ćwiczenie: Podać przykład operatora φ, który jest samosprzężony oraz

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in Spec(\varphi)} V_\lambda \right)^\perp \neq \{0\}\,.$$

Wsk: Niech V przestrzeń funkcji na $\mathbb{Z}$ o skończonym nośniku

$$V = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \mid \exists M \in \mathbb{R} \text{ takie, że } |n| > M \Rightarrow f(n) = 0\}$$

z iloczynem hermitowskim $(f, g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\overline{g(n)}$ oraz $\varphi(f)(n) = \frac{1}{2}(f(n-1) + f(n+1))$.

4.17 Zastosowanie bazy własnej operatora $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ na okręgu do rozwiązywania równania przewodnictwa cieplnego: szukamy funkcji $f_t(x) = f(t, x)$ spełniającej:

$$\frac{d}{dt} f = \Delta f \qquad \text{równanie ciepła,}$$

$$f(0, x) = g(x) \in C^\infty(S^1) \qquad \text{dane warunki początkowe.}$$

Rozwiązanie: zauważamy, że operator Δ jest samosprzężony. 1) Jeśli warunek początkowy $g(x)$ jest funkcją własną operatora Δ (tzn $g(x) = const$, $c\sin(kx)$, lub $c\cos(kx)$) to szukamy rozwiązani postaci

$$f(t, x) = a(t)g(x).$$

Wspćzynnik $a(t)$ spełnia równanie $\frac{d}{dt}a(t) = \lambda a(t)$, gdzie λ jest wartością własną g. To równanie umiemy rozwiązać: $a(t) = Ce^{\lambda t}$. Biorąc pod uwagę warunek początkowy $a(0) = 1$ dostajemy

$$f(t, x) = e^{\lambda t} g(x)\,.$$

2) Jeśli $g(x)$ jest dowolną funkcją, to rozwijamy ją w bazie funkcji własnych operatora Δ, tzn w szereg Fouriera

$$g(x) = a + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx).$$

Szukanym rozwiązaniem jest

$$f(t, x) = a + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin(kx).$$

4.18 Podsumowanie: omówiliśmy dwa typy operatorów nad $\mathbb{C}$
– unitarne: speńiające $\phi^*\phi = Id$
– samosprężone: spełniające $\phi = \phi^*$
Operatory (przy założeniu, że $\dim V < \infty$) są diagonalne w pewnej bazie ortonormalnej.

Jest większa klasa operatorów obejmująca omówione powyżej klasy. To są
– operatort normalne: spełniające $\phi^*\phi = \phi\,\phi^*$.
One też się diagonalizują: ϕ^* i ϕ mają wspólny wektor własny α. Sprawdzamy, że ϕ zachowuje $\mathrm{lin}\{\alpha\}^\perp$ i konstrujemy bazę indukcyjnie.
Nad $\mathbb{R}$ jedynie operatory samosprzęźone można zdiagonalizować.

Kwadryki w przestrzeni euklidesowej

4.19 Wniosek z diagonalizacji: dla każdej macierzy symetrycznej Q istnieje macierz ortogonalna C, taka, że C^TQC jest diagonalna. Zatem dla danej formy kwadratowej $q(x)$ w przestrzeni z iloczynem skalarnym. Istnieje ortonormalny układ wspólrzędnych $\{y_i(x)\}$ taki, że $q(x) = \sum a_i y_i^2$.

4.20 Kierunki osi głównych kwadryk, to kierunki własne stowarzyszonego operatora samosprzężonego.

4.21 Kanoniczne formy kwadryk. Każdą kwadrykę w przestrzeni euklidesowej można sprowadzić do postaci kanonicznej za pomocą izometrii:

$$(1)\ \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \qquad (k+\ell \le n)$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 0 \qquad (k+\ell \le n),$$

$$(3)\ \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 2x_n \qquad (k+\ell < n).$$

Liczby a_i w (1) to długości osi głównych.

4.22 Przykład: znaleźć osie główne kwadryki $6x^2 + 4xy + 9y^2 = 100$.
Kierunki osi głównych (wektory własne $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$) to $(1,2)$ i $(-2,1)$. Długości półosi: $\sqrt{10}$ i $\sqrt{20}$.

4.23 Ćwiczenie: Sprowadzić do postaci kanonicznej za pomocą izometrii

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - x + 4y = 5.$$

5 Operatory samosprzężone dodatniookreślone [Kos roz.3, §3.6]

5.1 Przykład do przeliczenia. Laplasjan dyskretny: $V = \mathbb{R}^n = Funkcje(\mathbb{Z}_n \to \mathbb{R})$, $\phi(f)(k) = \frac{1}{2}(f(k+1) + f(k-1)) - f(k)$. Udowodnić, że ϕ jest operatorem samosprzężonym, wartości własne są ujemne, oprócz jednej, która jest równa 0.

5.2 O geometrycznym znaczeniu zbioru wartości własnych laplasjanu czytaj np w
`https://en.wikipedia.org/wiki/Hearing_the_shape_of_a_drum`

5.3 Nieujemnie określone operatory samosprzężone: $(Bx, x) = (x, Bx) \geq 0$. Dla każdego operatora samosprzężonego nieujemnie określonego istnieje ,,pierwaistek", tzn operator samosprzężony, nieujemnie określony P, taki, że $P^2 = B$. Na podprzestrzeni wlasnej V_λ operator P jest równy $\sqrt{\lambda}$.

5.4 Przykład: $B = A^*A$ dla pewnego operatora A.

5.5 Ćwiczenie: Niech $V = C^\infty(S^1)$. Sprawdzić, że operator $A(f) = -f''$ jest nieujemnie określony samosprzężony. Jakie jest spektrum? (Jest on postaci B^*B.)

5.6 [Kos roz.3, §3.9] Rozkład polarny (biegunowy): każdy operator A da się zapisać jako złożenie $Q\,P$, gdzie Q należy do $O(n)$ (lub $U(n)$), P jest nieujemnie określony.
Dow: Jeśli A odwracalny $P = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$, $Q = AP^{-1}$, $QQ^* = (AP^{-1})(P^{-1}A^*) = A(A^*A)^{-1}A^* = I$
Dla nieodwracalniego A rozważamy $A_\epsilon = A + \epsilon I$. Dostajemy $A_\epsilon = Q_\epsilon P_\epsilon$. Można wybrać cąg $\epsilon_n \to 0$, taki, że Q_{ϵ_n} jest zbieżny.

5.7 Uwaga: nazwa od rozkladu polarnego liczby zespolonej (tzn $\dim V = 1$)

5.8 Operator P jest jednoznacznie wyznaczony (równy $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$), a jeśli A jest odwracalny, to Q też jest jednoznacznie wyznaczony.

5.9 ,,*Singular value decomposition SVD*" (RozkB3ad według wartości osobliwych): Każdą macierz kwadratową można przedstawić jako B_1DB_2, gdzie B_1 i B_2 są unitarne/ortogonalne, a D jest macierzą diagonalną o rzeczywistych nieujemnych wyrazach (dodatkowo można załóryć, że ciąg wyrazów na przekątnej jest nierosnący).

SVD jest stosowany do kompresjii obrazu:

$$B_1DB_2 \simeq B_1^{(k)}D^{(k)}B_2^{(k)}$$

gdzie
– $B_1^{(k)}$ skąda się z pierwszych k kolumn B_1
– $B_2^{(k)}$ skąda się z pierwszych k wierszy B_2
– $D^{(k)}$ jest macierzą diagonalną zawirającą pierwszych k wyrazów z przekątnej D
– liczba $k/n \simeq 1/10$
Patrz np
`http://math.arizona.edu/%7Ebrio/VIGRE/ThursdayTalk.pdf`
`http://www.mimuw.edu.pl/%7Eaweber/zadania/gal2017gw/Samosprzezone/svdmis.pdf`

5.10 Podsumowanie twierdzeń o macierzach kwadratowych $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (oraaz wersje rzeczywiste)
- tw Jordana
- rozklad KAN dla odwracalnych M: $M = KB$, $K \in U(n)$, B górnotrójkątna
- rozkład polarny $M = KP$, $K \in U(n)$, $P = P^*$
- diagonalizacja w bazie ortonormalnej operatorów unitarnych (blokowa nad $\mathbb{R}$),
- diagonalizacja w bazie ortonormalnej operatorów samosprzężonych - wartości własne rzeczywiste
- i antysamosprzężonych (tzn gdy $M^* = -M$, Ćwiczenie) - wartości własne urojone
- rozkład Choleskiego macierzy symetrycznych dodatnio określonych

5.11 Ćwiczenie: Dane $0 < k < n$. Niech $A \in End(\mathbb{R}^n)$ zachowuje objętość równoległościanów k-wymiarowych. Pokazać, że A jest izometrią.

6 Kwaterniony [Tor V, §5.4-6]

[też Alexei I. Kostrikin, Yu I Manin, Linear Algebra and Geometry (Algebra, Logic and Applications) - od str 169]

6.1 $SU(2) \simeq S^3$ (pierwsza kolumna jest dowolnym wektorem jednostkowym w $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, a druga postaci $(-\overline{b}, \overline{a})$

6.2 Niech

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbiór $\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ jest grupą ze względu na mnożenie macierzy:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \mathbf{i}\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\,\mathbf{k} = -\mathbf{k}\,\mathbf{j} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

6.3 Przestrzeń kwaternionów ($\mathbb{H}$ od Hamiltona)

$$\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$$

oraz kwaterniony czysto urojone

$$im\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}.$$

Tak jak poprzednio x^* oznacza $\overline{x}^T$. Dla kwaternionów czysto urojonych $x^* = -x$. „*” nazywamy sprzężeniem kwaternionowym.

6.4 Mamy $(xy)^* = y^* x^*$, bo to zachodzi dla bazy pochodzącej z $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

6.5 Dla $x \in \mathbb{H}$ mamy $x \cdot x^* \in \mathbb{R}_+$. Definiujemy $||x|| = \sqrt{x \cdot x^*}$. Dla $x = a\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mamy $||x|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

6.6 Mamy $||xy|| = ||x||\,||y||$.

6.7 Algebra z dzieleniem nad $\mathbb{K}$, to taka algebra nad $\mathbb{K}$ z jedynką, że każdy element różny od 0 jest odwracalny.

6.8 Każdy kwaternion niezerowy jest odwracalny $x^{-1} = x^*/||x||^2$, czyli kwaterniony są algebrą z dzieleniem nad $\mathbb{R}$.

6.9 Twierdzenie Freudenthala (bez dowodu): Jedyne skończenie wymiarowe algebry z dzieleniem nad $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$.

6.10 Kwaterniony o normie jeden to macierze spełniające $xx^* = 1$. Zatem to są macierze z $U(2)$. Ponadto $\det(x) = \det\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}_+$, czyli $x \in SU(2)$. Stąd $\mathbb{H} = \mathbb{R}_+ \cdot SU(2) \cup \{0\}$.

6.11 Iloczyn skalarny w przestrzeni kwaternionów czysto urojonych $(x, y) := -re(xy)$.

6.12 Przyjmujemy orientacje w $im\mathbb{H}$, tak aby $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ była bazą dodatnio zorientowaną. Dla kwaternionów czysto urojonych mamy

$$x \cdot y = -(x, y) + x \times y.$$

Stąd jeśli $x, y \in im\mathbb{H}$ i $x \perp y$ to $xy = -yx$.

6.13 Dla dowolnego jednostkowego kwaternionu $x \in SU(2)$ przekształcenie $im\mathbb{H} \ni y \mapsto xyx^* \in im\mathbb{H}$ jest izometrią. Stąd otrzymujemy przekształcenie $SU(2) \to SO(3) \subset GL(im\mathbb{H})$.

6.14 Geometrycznie przekształcenie zadane przez $x = \cos(t) + \sin(t)\ell$ dla czysto urojonego kwaternionu jednostkowego ℓ jest obrotem wokół ℓ o kąt $2t$.
Dow: rachunek osobno dla $y \in lin\,\ell$ i $y \in lin\,\ell^\perp$.

6.15 Powyższe przekształcenie $SU(2) \to SO(3)$ jest ,,na", 2 do 1, jądrem jest $\{I, -I\}$.

6.16 Obrót wokół ustalonej osi o $t \in 2\pi$ podniesiony do $SU(2)$ nie jest identycznością. Ale obrót o 4π podniesiony do $SU(2)$ jest identycznością.

(Parz w YouTubie ,,2 pi rotation is not an identity", ,,Your palm is a spinor" itp.)

6.17 W $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (i oktonionach $\mathbb{O}$) są spełnione:
1. $a \cdot a^* = a^* \cdot a = ||a||^2 \mathbb{1}$
2. $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$
3. $a + a^* \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$
4. $re(a \cdot b) = re(b \cdot a)$, gdzie re zdefiniowane jako rzut na $lin(\mathbb{1})$
5. $re(a \cdot (b \cdot c)) = re((a \cdot b) \cdot c)$ (to jest spełnione w $\mathbb{H}$, bo kwaterniony są łączne).

Powyższe własności są spełnione w tzw algebrach Hurwitza ,,composition algebra",
patrz http://en.wikipedia.org/wiki/Hurwitz's_theorem_(composition_algebras)
Są to skończeniewymiarowe algebry z jedynką, niekoniecznie łączne wyposażone w dodatnio określaoną formę kwadratową formę q, $q(a) = ||a||^2$ spełniającą $q(a \cdot b) = q(a)q(b)$. Forma kwadratowa zadaje iloczyn skalarny, sprzężenie jest zdefiniowane jako symetria względem $lin(\mathbb{1})$, część rzeczywista $re(a)$ to rzutowanie na $lin(\mathbb{1})$. Czyli wszystko jest zdefiniowane za pomocą formy kwadratowej. Ponadto
$(ab, ab) = (a, a)(b, b)$
$2(a, b)(c, d) = (ac, bd) + (ad, bc)$
Tw Hurwitza mówi, że jedyne algebry Hurwitza z dzieleniem nad $\mathbb{R}$ (z dokładnością do izomorfizmu) to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$.

6.18 Dodatek: Związki z polami wektorowymi na sferze: jeśli w $\mathbb{R}^{n+1}$ jest struktura algebry z dzieleniem, to na S^n jest n liniowo niezależnych pól:
Dow. Wybieramy iloczyn skalarny w R^{n+1}. Niech $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ będzie jedynką algebry. Dobieramy elementy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ stanowiące bazę $lin\{\mathbb{1}\}^\perp$. Wtedy dla każdego $g \in S^n$ elementy $g, gv_1, gv_2, \ldots, gv_n$ stanowią bazę $\mathbb{R}^{n+1}$. Niech π_g będzie rzutowaniem na $lin\{g\}^\perp$. Wektory $v_i(g) = \pi_g(gv_i)$ dla $i =$

$1, 2, \ldots n$ stanowią bazę $lin\{g\}^{\perp}$. To są pola wektorowe na S^n, ciągłe w zależności od $g \in S^n$ i liniowo niezależne.

Z tw. o zaczesywaniu sfery S^2 (nie ma ani jednego nigdzie nie znikającego pola) widzimy, że w $\mathbb{R}^3$ nie ma struktury algebry z dzieleniem.

7 Nieokreślone formy kwadratowe i ich grupy automorfizmów [Kos roz.4 §4]

7.1 Jeśli forma kwadrarowa określona przez symetryczną macierz B, to automorfizmami tej formy są przekształcenia liniowe o mocierzy A spełniającej $A^T BA = B$.

7.2 Przestrzenie z formą kwadratową typu (m, n), grupy $O(m, n)$, $SO(m, n)$, $SO(m, n)^+$

7.3 Ćwiczenie istnieje ciągła bijekcja $O(m, n) \simeq O(m) \times O(n) \times \mathbb{R}^{mn}$. (Jeśli $m \neq 0$ i $n \neq 0$, to grupa $O(m, n)$ ma 4 składowe spójne.)

7.4 Jeśli założyć, że nie możemy poruszać się prędzej niż światło, to nie możemy przekroczyć horyzontu zdarzeń będącego brzegiem obszaru $||x|| < c|t|$. Horyzont zdarzeń jest opisany równaniem kwadratowym $q(t, x) = c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. Zmiany układu współrzędnych typu $x' = f(x) + a\,t$ (układ poruszający się) muszą zachowywać horyzont zdarzeń. Jeśli $a = 0$, to f ma być izometrią. Sugeruje to, że powinniśmy rozważać przekształcenia liniowe czasoprzestrzeni zachoujące formę kwadratową q. Dla uproszczenia przyjmujemy $c = 1$.

7.5 Ćwiczenie: każde przekształcenie liniowe zachowujące stożek $ct^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ jest postaci $const \cdot \phi$, gdzie $\phi \in O(1, 3)$.

Grupa $O(1, 1)$

7.6 Najpierw rozważmy przestrzeń jednowymiarową, czyli czasoprzestreń ze współrzędnymi (t, x) z forma kwadratową $t^2 - x^2$. Grupa $O(1, 1)$ składa się z macierzy postaci $\begin{pmatrix} t & y \\ x & z \end{pmatrix}$, takich, że $t^2 - x^2 = 1$ oraz $(t, x) = \pm(z, y)$. Można przyjąc $t = \pm\cosh(\lambda) = (e^{\lambda} + e^{-\lambda})/2$, $x = \pm\sinh(\lambda) = (e^{\lambda} - e^{-\lambda})/2$.

7.7

$$SO(1,1) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \frac{a^{-1}+a}{2} & \frac{a^{-1}-a}{2} \\ \frac{a^{-1}-a}{2} & \frac{a^{-1}+a}{2} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \qquad SO(1,1)^+ = \left\{ A = \begin{pmatrix} \frac{a^{-1}+a}{2} & \frac{a^{-1}-a}{2} \\ \frac{a^{-1}-a}{2} & \frac{a^{-1}+a}{2} \end{pmatrix} : a > 0 \right\}$$

(Przyjmijmując $a = e^{-\lambda}$ mamy związek z postacią trygonometryczną hiperboliczną.)

7.8 Wniosek $SO(1, 1)^+ \simeq \mathbb{R}$ z działaniem dodawania.

7.9 Niech $\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Prędkość definiujemy jako $v := \frac{x_0}{t_0} = \frac{a^{-1}-a}{a^{-1}+a} = \frac{a^2-1}{a^2+1}$. Mamy $|v| < 1 =: c$. Stąd $a = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$, $\frac{a+a^{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, $\frac{a-a^{-1}}{2} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$.
(Inny punkt widzenia: Jeśli $A = \begin{pmatrix} \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) \end{pmatrix}$, to $v = \tanh(\lambda)$; oraz $\tanh(\alpha)$ wyznacza macierz A.)

7.10 Zatem $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}$, gdzie $v = x_0/t_0$, $\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Jeśli $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ to współrzędne (t', x') możemy wyrazić za pomocą (x, t) oraz v:

$$t' = \frac{t + vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2}},$$

lub odwrotnie

$$t = \frac{t' - vx'}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

7.11 Ćwiczenie: Jeśliby $c \neq 1$, forma kwadratowa $c^2t^2 - x^2$, to

$$t' = \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

7.12 Odległość zmienia się zgodnie ze wzorem $|x_1' - x_2'| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{1-v^2}}$ gdy $t_1 = t_2$

7.13 Podobnie czas $|t_1' - t_2'| = \frac{|t_1 - t_2|}{\sqrt{1-v^2}}$ gdy $x_1 = x_2$

7.14 Jeśliby $c \neq 1$, to $|x_1' - x_2'| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $|t_1' - t_2'| = \frac{|t_1 - t_2|}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

7.15 Ćwiczenie: wyprowadzić wzór na składanie prędkości $v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}$

Grupa Lorentza

7.16 Czasoprzestrzeń $\mathbb{R}^4$ z formą typu $(1, 3)$. Badamy grupę $SO(1, 3)^+$ to składowa identyczności $SO(3, 1)$ (te przekształcenia, które dadzą się w sposób ciągły zdeformować do Id. (Inna nazwa: właściwa grupa Lorenza.)

7.17 Niech $V \subset M(2 \times 2; \mathbb{C})$ zbiór macierzy hermitowsko symetrycznych tzn $X = X^*$,

$$X = \begin{pmatrix} t + x_1 & x_2 - ix_3 \\ x_2 + ix_3 & t - x_1 \end{pmatrix}.$$

Forma kwadratowa: $q(A) = \det(A) = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Utożysamiamy czasoprzestrzeń ze zbiorem operatorów samosprężonych w $\mathbb{C}^2$

7.18 Przestrzeń V rozpada się na podzbiory zachowywane przez $SO(1, 3)^+$
– zera formy $q(-) = \det(-)$, czyli macierze zdegenerowane. Fizycy mówią na to ,,stożek światła".
– $q(A) < 0$ tzn tam wartości własne X mają różne znaki
– dwie składowe $q(A) > 0$ tzn tam wartości własne X mają takie same znaki (stożek dodatni i ujemny)

7.19 Oś czasowa V to $V_t = lin \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, a część przestrzenna to

$$V_x = lin \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(to są macierze Pauliego, mnożąc przez i dostajemy bazowe kwaterniony).

7.20 Część przestrzenna jest opisana równaniem $t = \frac{1}{2} tr(X) = 0$.

7.21 Grupa $SL_2(\mathbb{C})$ działa na V przez: $A \cdot X := AXA^*$.
Dow: $tr(AXA^*) = tr(XA^*A) = tr(X)$ dla każdego X.

7.22 To działanie zgadza się z działaniem na $im\mathbb{H} = i\,V_x$

$$\begin{array}{cccc} \rho: & SU(2) & \subset & SL_2(\mathbb{C}) \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright \\ & im\mathbb{H} & \overset{\cdot i^{-1}}{\hookrightarrow} & V \end{array}$$

7.23 Twierdzenie: Mamy izomorfizm

$$L^+ := SO(1,3)^+ \simeq SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$$

pochodzące od odwzorowania

$$\rho : SL_2(\mathbb{C}) \to SO(1,3)$$

$$A \mapsto \rho(A), \qquad \text{gdzie } \rho(A)(X) = AXA^*\,.$$

Przypomnijmy ponadto, że

$$SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I\} \simeq GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^* =: PGL_2(\mathbb{C}) \quad \text{przekształcenia rzutowe}$$

7.24 Pierwsza część twierdzenia jest równoważna z: Otrzymane odwzorowanie $SL_2(\mathbb{C}) \to SO(1,3)^+$ jest ,,na", 2 do 1, $ker = \{\pm I\}$.
1) Sprawdzamy, że jądro tego odwzorowania, to $\pm I$:
$ker = \{A \in SL_2(\mathbb{C}) \ : \ \forall X \in V \quad AXA^* = X\}$, biorąc $X = I$ widzimy, że $A \in SU(2)$, i dalej korzystamy z tego jak wygl:ada odwzorowanie $SU(2) \to SO(3)$.
2) Liczymy wymiar grupy: tzn liczymy stopnie swobody. W obu grupach wychodzi 6 i korzystamy z ogólnej własności grup (grup Liego): jeśli grupy mają równy wymiar, a jądro odwzorownia jest skończone, to obraz zawiera całą składową identyczności. (Nie dowodzimy tego twierdzenia, elementarny dowód epimorficzności może być traktowane jako **Ćwiczenie**).

8 O przestrzeni Łobaczewskiego

8.1 Grupa $SL_2(\mathbb{C})$ działa na V przez: $A \cdot X := AXA^*$. Podgrupa $SU(2)$ zachowuje współrzędną czasową. Odpowiada to zamianom układu współrzednych z prędkością 0.

8.2 Jeśli A zachowuje współrzędną czasową t, to $A \in SU(2)$. (Z równości $A^*IA \in \mathbb{R}I$ wynika, że $A^*A = I$, więc $A \in SU(2)$.)

8.3 Definiujemy przestrzeń Łobaczewskiego Λ jako zbiór prostych w stożku dodatnim [Kos roz.7 §5]. Czyli $\Lambda \subset \mathbb{P}(V)$ jest zawarta w mapie afinicznej $t \neq 0$. We współrzędnych $u_i = x_i/t$ zbiór Λ jest opisany nierównością $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < 1$. Zatem przestrzeń Łobaczewskiego można utożsamić z kulą w $B \subset \mathbb{R}^3$.

8.4 Model hiperboliczny: Przestrzeń Łobaczewskiego utożsamiamy jednym płatem kwadryki

$$H = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) | A = A^*,\, tr(A) > 0,\, det(A) = 1\} \simeq \{(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 | t > 0, t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

8.5 Działanie $SO(1,3)^+$ na Λ jest
– przechodnie (tzn jest jedna orbita, tzn $\forall x, y \in \Lambda\ \exists g \in SO(1,3)^+\ x = g \cdot y$)
– stabilizator (=grupa izotropii, = grupa stacjonarna) każdego punktu jest izomorficzny z $SO(3)$
Dw: Pokażemy, że działając $SL_2(\mathbb{C})$ na H każdą macierz X przekształcimy na I. Macierzą z $SU(2)$ doprowadzamy X do postaci diagonalnej (twierdzenie spektralne) $diag(a, a^{-1})$. Wyrazy na przekątnej są > 0, bo $X \in H$. Teraz za pomocą $A = diag(a^{-1/2}, a^{1/2})$ doprowadzamy do I. Stabilizator liczymy dla $X = I$.

8.6 Przestrzeń styczna $T_{(t,x)}H$ jest opisana równaniem $\phi((t,x), v) = 0$, czyli

$$T_{(t,x)}\Lambda = lin\{(t,x)\}^{\perp},$$

gdzie ϕ jest formą 2-liniową stowarzyszoną z formą kwadratową $t^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.
(Dowód ogólny dla zbioru opisanego równaniem kwadratowym $q(x) = 0$. Wektor v jest styczny w punkcie p (z definicji) jeśli istnieje krzywa $\gamma(s) = p + sv + \mathcal{O}(s^2)$ całkowicie zawarta w zbiorze zadanym równaniem $q = 0$. Zatem dla każdego s

$$0 = q(\gamma(s)) = \phi(p + sv + \mathcal{O}(s^2), p + sv + \mathcal{O}(s^2)) = \phi(p,p) + 2s\phi(p,v) + \mathcal{O}(s^2).$$

Stąd musi być $\phi(p,v) = 0$.)

8.7 W każdym punkcie $p \in H \subset \mathbb{R}^4$ forma kwadratowa $t^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ obcięta do przestrzeni stycznej do H jest niezdegenerowaną formą ujemnie określoną. Definiujemy formę kwadratową na $T_{(t,x)}$ zmieniając znak aby mieć iloczyn skalarny.

8.8 Iloczyn skalarny w przestrzeniach stycznych pozwala liczyć długość krzywych. Odległość pomiędzy dwoma punktami definiujemy jako infimum po wszystkich krzywych łączących dane punkty. Okazuje się, że najkrótsze krzywe łączące punkty (geodezyjne) nie są odcinkami, lecz łukami okręgu prostopadłego do brzehu. W tej geometrii suma kątów trójkąta geodezyjnego jest mniejsza od π. Mamy

$$\pi - \text{suma kątów} = \text{pole trójkąta}\,.$$

Dla porównaia na sferze jednostkowej mamy

$$\text{suma kątów} - \pi = \text{pole trójkąta}\,.$$

8.9 Wprowadzamy współrzędne na H wzorem $y_i = \frac{x_i}{1+t}$, co odpowiada rzutowaniu stereograficznym $\pi : H \to B \subset \{0\} \times \mathbb{R}^3$ z punktu $(-1,0,0,0)$. Norma wektora w punkcie (t,x) różni się o czynnik $\frac{2}{1-||y||^2}$ od normy standardowej w punkcie $y = x/(1+t) \in B$:

$$||v||_{\text{hiperboliczna}} = \frac{2}{1-||y||^2}||D\pi(v)||_{\text{standard}}\,, \qquad \text{dla } v \in T_{(t,x)}H\,.$$

Dow. Odwrotna zamiana współrzędnych:

$$(t,x) = \frac{1}{1-||y||^2}(1 + ||y||^2, 2y),.$$

Sferom o środku w 0 zawartym w B odpowaidają sfery w H położone w przestrzeniach zadanych warunkiem $t = const$. Są one rozciągnięte w skali $\frac{2}{1-||u||^2}$.

Kryzywej $\gamma(s) = (s, 0, 0)$ na B odpowiada na H krzywa postaci $\frac{1}{1-s^2}(1+s^2, 2s, 0, 0)$. Ma on prędkość, liczoną wg. nowego iloczynu skalarnego, także równą $\frac{2}{1-||u||^2}$ (ćwiczenie z różniczkowania). Krzywa ta jest prostopadła do koncentrycznych sfer $||y|| = const$ w obu iloczynach skalarnych. Zatem obie przestrzenie styczne T_yB i $T_{(t,x)}H$ rozkładają się na prostopadłe składniki rozciągane w tym samym skalarem. Zatem funkcja $(t, x) \to y$ jest izometrią. cbdo

8.10 Uwaga: Przekształcenie

$$H \ni (t, x) \ \mapsto \ (-1, \frac{x}{1+t}) \in \mathbb{R}^4$$

jest wersją rzutu stereograficznego dobrze znanego mniejszym wymiarze dla sfery

$$\mathbb{R}^3 \supset S^2 \ni (t, x) \ \mapsto \ (-1, \frac{x}{1+t}) \in \mathbb{R}^3 .$$

Tu także odwzorowanie ze sfery na płaszczyznę jest wiernokątne (konforemne). Ćwiczenie: policzyć współczynnik rozciągnięcia.

8.11 Opisana tu została *geometria hiperboliczna.* (W dim=2 patrz *dysk Poincaré.*) Elementy grupy $SO^+(1, 3)$ działają jak izometrie.

8.12 Ćwiczenie: opisać orbity działania $SL_2(\mathbb{C})$ na całej $\mathbb{P}(V)$.

GAL*, konspekt wykładów: Tensory

15.6.2018

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

[Kos roz. 6]. Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Iloczyn tensorowy

1.1 Zewnętrzna suma prosta $S = V \oplus W$ (zbiór równy produktowi kartezjańskiemu z działaniami po współrzędnych) może być zdefiniowana przez diagram (przypomnienie)

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "i_V"'] \arrow[dr, "\forall\,\phi_V"] & \\
S \arrow[rr, dotted, "\exists!\,\phi"] & & U \\
 & W \arrow[ul, "i_W"] \arrow[ur, "\forall\,\phi_W"'] &
\end{tikzcd}$$

1.2 [Kos roz.6 §5 Tw.3] Dla przestrzeni liniowych V i W rozważamy wszystkie odwzorowania 2-liniowe $\phi : V \times W \to U$. Istnieje przestrzeń $\mathbb{T}$ wraz z odwzotowaniem 2-liniowym $\tau : V \times W \to \mathbb{T}$ o tej własności, że każde przekształcenie ϕ faktoryzuje się jednoznacznie przez τ

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{T} \arrow[dd, dotted, "\exists!\,\tilde{\phi}"] \\
V \times W \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\forall\,\phi"'] & \\
 & U
\end{tikzcd}$$

1.3 Przestrzeń V wraz z odwzorowaniem $\tau : V \times W \to \mathbb{T}$ jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu. Oznaczana przez $V \otimes W$. Ma własność: dla każdej przestrzeni wektorowej U mamy

$$L_{\text{2-liniowe}}(V \times W, U) = L(V \otimes W, U).$$

1.4 Konstrukcja efektywna $V \otimes W$ za pomocą baz w V i W. Wymiar $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$.

1.5 Inna konstukcja: Definiujemy (ogromną) przestrzeń o bazie $e_{v,w}$ indeksowaną parami $(v, w) \in V \times W$. Jej elementami są formalne kombinacje

$$\sum_{i=1}^{n} a_{v_i,w_i} e_{v_i,w_i}\,, \quad \text{gdzie } a_{v_i,w_i} \in K.$$

Dzielimy tę przestrzeń przez podprzestrzeń rozpiętą przez

- $a\, e_{v,w} - e_{av,w}$ dla $a \in \mathbb{K}$
- $a\, e_{v,w} - e_{v,aw}$ dla $a \in \mathbb{K}$
- $e_{v_1,w} + e_{v_2,w} - e_{v_1+v_2,w}$ dla $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$
- $e_{v,w_1} + e_{v,w_2} - e_{v,w_1+w_2}$ dla $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$

Elementami przestrzeni ilorazowej $V \otimes W$ są kombinacje liniowe

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i := \sum_{i=1}^{n} [e_{v_i,w_i}]$$

gdzie $v_i \in V$, $w_i \in W$. Wyrażenia te przekształcamy według reguł:
– $(a\,v) \otimes w = v \otimes (a\,w) = a(v \otimes w)$ dla $a \in \mathbb{K}$
– $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$ oraz $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$

1.6 Ćw Odwzorowanie $\tau : V \times W \to V \otimes W$ ma własność

$$\tau(v, w) = \tau(av, a^{-1}w) \quad \text{dla } a \neq 0\,,$$

$$\tau(v, 0) = 0 = \tau(0, w)\,.$$

Po pozieleniu przez relację wynikające z powyższych równości relacje, przekształcenie $W \to V/\sim \otimes W$ jest różnowartościowe.

1.7 Elementy $\tau(v, w) = v \otimes w$ są nazywane tensorami prostymi. Tensory proste rozpinają $V \otimes W$.

1.8 Niech $\dim V = \dim W = 2$. Tensorów prostych w $V \otimes W$ w bazie $\alpha_1 \otimes \beta_1$, $\alpha_1 \otimes \beta_2$, $\alpha_2 \otimes \beta_1$, $\alpha_2 \otimes \beta_2$ składa się z czwórek postaci

$$(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)\,.$$

Te lelemnty leżą na kwadryce zadaniej równaniem

$$x_1x_4 - x_2x_3 = 0\,.$$

Gdy V i W mają większy wymiar, jedno równanie nie wystarzy. Udowodnić, że zbiór tensorów prostych można opisać układem równań kwadratowych.

1.9 Ćwiczenie: Jeśli wektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne, oraz $\sum v_i \otimes w_i = 0$ to $w_1 = w_2 = \cdots = w_k$.

1.10 Macierz zamiany bazy w V przy zamianach baz w V i W jeśli
$\{\alpha'_k\}$, $\{\alpha_i = \sum_k a_i^k\, \alpha'_k\}$ bazy V,
$\{\beta'_\ell\}$, $\{\beta_j = \sum_\ell b_j^\ell\, \beta'_\ell\}$ bazy W,
to
$\alpha_i \otimes \beta_j = \sum_{k,\ell} a_i^k b_j^\ell\, \alpha'_k \otimes \beta'_\ell$,
w konwencji Einsteina
$\alpha_i \otimes \beta_j = a_i^k b_j^\ell\, \alpha'_k \otimes \beta'_\ell$.

1.11 Jeśli

$$T = \sum_{i,j} T^{i,j} \alpha_i \otimes \beta_j = \sum_{i,j} T'^{i,j} \alpha'_i \otimes \beta'_j,$$

to

$$T'^{i,j} = \sum_{k,\ell} T^{k,\ell}\, a_k^i\, b_\ell^j.$$

1.12 W dalszej części przez przekształcenie, izomorfizm, itp. *naturalny* rozumiemy niezależny od wyboru bazy. Pełne znaczenie słowa *naturalny* można wyrazić używając pojęć kategorii (patrz naturalna transformacja funktorów).

1.13 Dla przestrzeni liniowych V, W, Z mamy następujące naturalne izomorfizmy

- $\{0\} \otimes V \simeq \{0\}$,
- $\mathbb{K} \otimes V \simeq V$,
- $V \otimes W \simeq W \otimes V$,
- $(V \otimes W) \otimes Z \simeq V \otimes (W \otimes Z)$,
- $(V \oplus W) \otimes Z \simeq (V \otimes Z) \oplus (V \otimes Z)$.

(W ostatnim wzorze nie ma konieczności pisania nawiasów po prawej stronie. Piszemy $V \otimes Z \oplus V \otimes Z$).

2 Tensory c.d

2.1 Dla przestrzeni liniowych W, Z zbiór przekształceń liniowych $L(W, Z)$ ma strukturę przestrzeni liniowej. Własność iloczynu tensorowego: istnieje *naturalne* przekształcenie,

$$L(V, L(W, Z)) \to L(V \otimes W, Z)\,,$$

które jest izomorfizmem. Jest ono zadane tak: dane $\alpha : V \to L(W, Z)$, definiujemy przekształcenie 2-liniowe $\beta : V \times W \to Z$, $\beta(v, w) := \alpha(v)(w)$. Teraz β zadaje $\tilde{\beta} : V \otimes W \to Z$.

2.2 Istnieje naturalne przekształcenie $V^* \otimes W \to L(V, W)$, które jest izomorfizmem, jeśli $\dim V < \infty$. Jeśli $\dim V = \infty$, to obraz składa się z endomorfizmów, których obraz jest skńczonego wymiaru.

2.3 Jeśli $\dim V < \infty$ i $\dim W < \infty$ to $V^* \otimes W^* \simeq (V \otimes W)^*$.
Dow. przekształcenie z $V^* \otimes W^*$ wystarczy zadać na $V^* \times W^*$:

$$V^* \times W^* \to (V \otimes W)^* = L(V \otimes W, \mathbb{K}) = L_{\text{2-liniowe}}(V \times W, \mathbb{K}).$$

Wystarczy na tensorach prostych

$$f \otimes g \mapsto \Big((v, w) \mapsto f(v)g(w)\Big).$$

2.4 Operacja kompleksyfikacji przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$:

$$V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$$

oznacza iloczyn tensorowy $\mathbb{C}$ (jako przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$) z V.

$$V_{\mathbb{C}} = \{1 \otimes v + i \otimes w \mid v, w \in V\}.$$

Takie tensory można mnożyć przez liczby zespolone.

2.5 Mamy $(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \simeq V \oplus V$ dla przestrzeni rzeczywistej V.

2.6 Gdy V jest przestrzenią zespoloną, to $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \simeq V \oplus \overline{V}$, gdzie $\overline{V}$ jako zbiór jest równe V, ale ma zmienione mnożenie przez skalary zespolone: $z \odot v := \overline{z}v$. (Ćwiczenie.)

Klasyczne tensory typu (p, q)

2.7 Tensory typu p-kowariantne q-kontrawariantne to funkcje $p+q$-liniowe

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{q} \to \mathbb{K}$$

czyli elementy

$$\Big(\underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \times \cdots \otimes V^*}_{q}\Big)^* \simeq$$

$$\simeq \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \times \cdots \otimes V}_{q}$$

W skrócie $\mathbb{T}^q_p(V) = (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$.

2.8 Tensor typu
(1,0) – funkcjonał
(0,1) – wektor
(1,1) – endomorfizm
(2,0) – forma 2-liniowa
(2,1) – np mnożenie w algebrze
(0,0) – skalar

2.9 Dana baza $\{\alpha_k\}$ przestrzeni V. Niech $\{\alpha^k\}$ baza sprzężona przestrzeni V^*, oraz dany tensor T typu (p, q). Jego współrzednymi w bazie $\alpha^{i_1} \otimes \ldots \alpha^{i_p} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \alpha_{j_q}$ są liczby

$$T^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p} = T(\alpha_{i_1} \times \ldots \alpha_{i_p} \times \alpha^{j_1} \times \ldots \alpha^{j_q})\,.$$

2.10 Reguły transformacji:
jeśli $\alpha_i = \sum_k a^k_i\, \alpha'_k$
niech $\alpha^j = \sum_\ell b^j_\ell\, \alpha'^\ell$.
(Macierz $(b^i_k) = (a^k_i)^{-1}$, nie trzeba transponować, bo transpozycja jest zawarta w notacji.)

$$T'^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p} = \sum_{i',j'} b^{i'_1}_{i_1} \ldots b^{i'_p}_{i_p}\, T^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}\, a^{j_1}_{j'_1} \ldots a^{j_q}_{j'_q}.$$

2.11 Co to za tensor $T^j_i = \delta^j_i$?

2.12 Który z następujących tensorów jest tensorem prostym? a) $T^{i,j} = i + j$, b) $T^{i,j} = i\,j$

2.13 Mnożenie tensorów: S typu (p, q), T typu (p', q'), to $S \otimes T$ typu $(p + p', q + q')$.

2.14 Zwężenie tensorów (kontrakcja)
– ślad $tr : End(V) = V^* \otimes V \to \mathbb{K}$ zadany przez przekształcenie 2-liniowe $V^* \times V \to \mathbb{K}$, $(f, v) \mapsto f(v)$.
We współrzędnych $\sum_{i,j} T_i^j \alpha^i \otimes \alpha_j \mapsto \sum_i T_i^i \in \mathbb{K}$
– dla wybranych indeksów $r \leq q$, $s \leq p$

$$tr_s^r : \mathbb{T}_p^q(V) \to \mathbb{T}_{p-1}^{q-1}(V)$$

$$tr_s^r(T)^{j_1,\cdots\overset{r}{\vee}\ldots j_q}_{i_1,\cdots\overset{s}{\vee}\ldots,i_p} = \sum_i T^{j_1,\cdots\overset{r}{i}\ldots j_q}_{i_1,\cdots\overset{s}{i}\ldots,i_p}.$$

2.15 Tensor metryczny to tensor typu (2,0), czyli forma 2-liniowa, która jest iloczynem skalarnym $G = \sum g_{i,j} e^i \otimes e^j$, zadaje izomorfizm $V \to V^*$, $v = \sum_i x^i e_i \mapsto \sum_{i,j} g_{i,j} x^i e^j = tr_1^1(g \otimes v)$
– ogólniej tesor metryczny pozwala opuszczać wskaźniki $\mathbb{T}_p^q(V) \to \mathbb{T}_{p+1}^{q-1}$

$$T \mapsto tr_1^r(G \otimes T)$$

– operacja podnoszenia wskaźników jest zadana przez zwężanie z tensorem typu (0,2),

$$T \mapsto tr_s^1(G^{-1} \otimes T)$$

gdzie $G^{-1} = \sum_{i,j} g^{i,j} e_i \otimes e_j$ spełnia $tr_1^1(G^{-1} \otimes G) = \sum_{i,j} \delta_i^j e^i \otimes e_j$ (macierzowo $[g^{i,j}] = [g_{i,j}]^{-1}$).

3 Algebra tensorowa

3.1 Graficzna reprezentacja tensorów:
http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_graphical_notation

3.2 Przez $\mathbb{T}(V)$ oznaczamy algebrę tensorową

$$\mathbb{T}(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathbb{T}^q(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} V^{\otimes q} = \mathbb{K} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \ldots$$

3.3 Własność uniwersalna: Dla dowolnej algebry A z 1 nad ciałem $\mathbb{K}$

$$L(V, A) = Mor_{\text{algebry z 1}}(T(V), A)\,.$$

Algebra symetryczna

3.4 Definiujemy algebrę symetryczną $S(V)$ jako przestrzeń ilorazową $\mathbb{T}(V)/\sim$. Dzielimy przez podprzestrzeń rozpiętą przez

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_q) - (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_q).$$

3.5 Jeśli ustalić bazę V i nazwać ją $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to $S(V) \simeq \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (pierścień wielomianów). Jeśli $V = W^*$, $|\mathbb{K}| = \infty$ to $S(V)$ utożsamiamy z funkcjami wielomianowymi na W.

3.6 Mamy rzutowanie $\mathbb{T}(V) \to S(V)$. Jeśli chrakterystyka ciała jes równa zero, to w $\mathbb{T}(V)$ mamy podalgebrę (też będzie oznaczaną przez $S(V)$), która rzutuje się izomorficznie na $S(V)$. Składa się ona z tensorów symetrycznych: Grupa permutacji Σ_q działa na $\mathbb{T}^q(V) = V^{\otimes q}$ permutując współrzędne. Tensor T jest symetryczny jeśli dla każdej permutacji $\sigma(T) = T$, tzn we współrzędnych $T^{i_1,i_2,\ldots,i_q} = T^{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\ldots,i_{\sigma(q)}}$

3.7 Symetryzacja : zakładamy, że $char(\mathbb{K}) = 0$ i uśredniamy po permutacjach $\sigma \in \Sigma_q$

$$sym : V^{\otimes q} \to S^q(V), \qquad sym(T) = \tfrac{1}{q!} \textstyle\sum_\sigma \sigma(T),$$

Mamy $sym \circ sym = sym$, zatem sym jest rzutowaniem na przestrzeń tensorów symetrycznych.

3.8 Niech $e_1, e_2, \ldots e_n$ baza V, wtedy tensory $e_I = sym(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_q})$ dla $I = \{i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_q\}$ są bazą $S^q(V)$.

3.9 Ćwiczenie; obliczyć $\dim S^q(\mathbb{R}^n)$.

3.10 Gdy $char\, \mathbb{K} \leq q$ przekształcenie

$$\{tensoy\ symetryczne\} \to S^q(V)$$

nie jest izomorfizmem, np dla $q = 2$, $char\ \mathbb{K} = 2$ element przestrzeni ilorazowej $[v \otimes w]$ nie jest obrazem tensora symetrycznego.

3.11 Własność uniwersalna: A algebra przemienna, nad ciałem $\mathbb{K}$

$$L(V, A) = Mor_{\text{algebry przemienne z 1}}(S(V), A)\,.$$

Algebra zewnętrzna

3.12 Definiujemy algebrę zewnętrzną $\Lambda(V)$ jako przestrzeń ilorazową $\mathbb{T}(V)/\sim$. Dzielimy przez podprzestrzeń rozpiętą przez

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_q) + (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_q).$$

3.13 Mnożenie jest przemienne z uwzględnieniem gradacji (super-przemienne): tzn dla $a \in \Lambda^i V$, $b \in \Lambda^j V$ mamy $a \wedge b = (-1)^{ij}\, b \wedge a$.

3.14 Ćw: Sformułować własność uniwersalną definiującą $\Lambda(V)$.

3.15 Załóżmy dla uproszczenia, że $char\mathbb{K} = 0$. Tak jak w przypadku algebry symetrycznej istnieje podalgebra w $\mathbb{T}(V)$ rzutująca się izomorficznie na $\Lambda(V)$.

Tensor $T \in V^{\otimes q}$ jest antysymetryczny jeśli dla każdej permutacji σ $\sigma(T) = sgn(\sigma)\, T$. We współrzędnych:

$$T^{i_1,i_2,\ldots,i_q} = sgn(\sigma)\, T^{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\ldots,i_{\sigma(q)}}.$$

3.16 Jedynie dla $q = 2$ mamy $V^{\otimes 2} = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$.

3.17 Operacja antysymetryzacji

$$A : V^{\otimes q} \to \Lambda^q(V)$$
$$A(T) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_q} (-1)^{sgn(\sigma)} \sigma(T).$$

Mamy $A \circ A = A$.

3.18 Niech $e_1, e_2, \dots e_n$ baza V, wtedy tensory $e_I = A(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_q})$ dla $I = \{i_1 < i_2 < \dots i_q\}$ są bazą $\Lambda^q(V)$. Stąd $\dim \Lambda^q(V) = \binom{\dim V}{q}$.

3.19 Iloczyn zewnętrzny: $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_q = A(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q) \in \Lambda^q(V) \subset \mathbb{T}(V)$

Dodatek

3.20 Potęga zewnętrzna przestrzeni sprzężonej $\Lambda^p(V^*)$ to p-formy alternujące na V. Gdy $n = \dim(V)$ generatorem $\Lambda^n(V^*)$ jest wyznacznik (rozumiany jako n-liniowa forma antysymetryczna $V^n \to \mathbb{K}$).

3.21 Niezdegenerowane przekształcenie 2-liniowe $\langle\ ,\ \rangle : \Lambda^q(V^*) \times \Lambda^q(V) \to \mathbb{K}$ poprzez włożenie do $\mathbb{T}^q_q(V)$ i zwężenie wszystkich indeksów. Na bazie $\langle e^I, e_J \rangle = \frac{1}{q!}\, \delta^J_I$,

3.22 Żeby pozbyć się czynnika $\frac{1}{q!}$ dla form modyfikujemy definicję e^J tak, aby to była baza sprzężona do e_I. Traktując e^J jako tensor typu $(q, 0)$ mamy

$$(e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_q})(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_q}) = \delta^J_I$$

(Jednak w literaturze zdarzają się też inne konwencje.)

---

4 Algebra zewnętrzna (cd) i algebry Clifforda (wykład 05.06.2014)

4.1 Własność uniwersalna: $A = A^{ev} \oplus A^{odd}$ algebra przemienna z $\mathbb{Z}_2$-gradacją, nad ciałem $\mathbb{K}$

$$L(V, A^{odd}) = Mor_{\text{algebry super-przemienne}}(\Lambda V, A)\,.$$

4.2 Własność uniwersalna potęgi zewnętrznej: Dla każdego wieloliniowego przekształcenia $f : V^q \to W$, które jest antysymeteryczne istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\widetilde{f} : \Lambda^q V \to W$ takie, że $f(v_1, v_2, \ldots, v_q) = \widetilde{f}(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_q)$.

4.3 Jeśli $n = \dim V$, to $\dim \Lambda^n V = 1$, niezerowy wektor $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$.
Dla wektorów $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$, $v_j = \sum a^i_j e_i$ mamy $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = \det[a^i_j]\, e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$.

4.4 Współrzędne wektora $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$ w bazie $\{e_I\}$ to maksymalne minory macierzy $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

4.5 Ćwiczenie: Wektory $v_1, v_2, \ldots v_k \in V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k \neq 0$.

4.6 Tw Cauchy-Bineta: jeśli $A \in M_{q\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times q}(\mathbb{K})$ to $\det(AB) = \sum_I \det(A^I)\det(B_I)$, gdzie A_I i B^I są macierzami $q \times q$ powstałymi z A i B poprzez wybór kolumn/wierszy o numerkach ze zbioru $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.

Algebra Clifforda

4.7 Niech ϕ będzie formą kwadratową na V. Algebrę Clifforda $Cl(Q)$ wraz z przekształceniem $\iota : V \to Cl(Q)$ definiujemy przez wąsność uniwersalnaą: Niech A będzie algebrą z $\mathbb{1}$, oraz niech $f : V \to A$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym $f(v)^2 = Q(v)\mathbb{1}$. Wtedy istnieje dokładnie jedno przekształcenie algebr $\tilde{f} : Cl(Q) \to A$ takie, że $f = \tilde{f} \circ \iota$.

4.8 Konstrukcja algebry Clifforda: $Cl(Q)$ jest ilorazem algebry tensorowej

$$Cl(Q) = \mathbb{T}(V)/\langle v \otimes v - Q(v) \mid v \in V\rangle\,,$$

gdzie dla zbioru $A \subset \mathbb{T}(V)$ przez $\langle A\rangle$ rozumiemy podprzestrzeń rozpiętą przez elementy $T_1 \otimes a \otimes T_2$, $a \in A$ (tzn ideał dwustronny).

4.9 Algebry zewnętrzne są przykładem algebr Clifforda: wystarczy wziąć $Q = 0$.

4.10 Iloczyny $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_q}$ indeksowane wszystkimi ciągami rosnącymi są bazą algebry Clifforda. Stąd $\dim Cl(Q) = 2^{\dim V}$

4.11 $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ jako algebry Clifforda.

4.12 Niech $Cl(k) = Cl(\mathbb{R}^k, (-\text{forma standardowa}))$, oraz niech $A[n]$ oznacza algebrę macierzy o współczynnikach z A. Mamy
$Cl(0) = \mathbb{R}$
$Cl(1) \simeq \mathbb{C}$
$Cl(2) \simeq \mathbb{H}$

$Cl(3) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$

$Cl(4) \simeq \mathbb{H}[2]$

$Cl(5) \simeq \mathbb{C}[4]$

$Cl(6) \simeq \mathbb{R}[8]$

$Cl(7) \simeq \mathbb{R}[8] \oplus \mathbb{R}[8]$

$Cl(8+k) \simeq Cl(k)[16]$ (Periodyczność Botta)

GAL z ★ 2018

http://www.mimuw.edu.pl/∼aweber/zadania/gal2018gw/

Wersja 8.6.2018

1 Zadania kategoryjne

Definicja produktu
Kategoryjna definijcja produktu: Jeśli V wraz z przekształceniami π_1, π_2 spełnia warunek *dla dowolnej przestrzeni U oraz przekształceń ϕ_i, ϕ_j istnieje dok:ladnie jedno przekształcenie ϕ, takie, że $\phi_i = \pi_i\phi$ dla $i = 1, 2$*

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
V_1 & & V_2 \\
 & Z \arrow[ul, "\forall\phi_1"] \arrow[ur, "\forall\phi_2"'] \arrow[uu, dotted, "\exists!\,\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

wtedy $V \simeq V_1 \times V_2$.

Definicja (zewnętrznej) sumy prostej (koproduktu):

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dr, "\forall\phi_1"] \arrow[dd, dotted, "\exists!\,\phi"] & \\
V_1 \arrow[ur, "\iota_1"] \arrow[dr, "\forall\phi_1"'] & & V_2 \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[dl, "\forall\phi_2"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

Dane obiekty A_i dla $i \in I$.
(Ko)produkt rodziny obiektów

• Obiekt S wraz z odwzorowaniami $\iota_i : A_i \to S$ nazywamy koproduktem rodziny $\{A_i\}_{i\in I}$ gdy dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $f_i : A_i \to C$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f : S \to C$ taki, że $f_i = f\iota_i$ dla każdego $i \in I$.

• Obiekt P wraz z odwzorowaniami $\pi_i : P \to A_i$ nazywamy produktem rodziny $\{A_i\}_{i\in I}$ gdy dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $f_i : C \to A_i$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f : C \to P$ taki, że $f_i = \pi_i f$ dla każdego $i \in I$.

Produkty i koprodukty skończonych rodzin są izomorficzne w kategorii przestrzeni wektorowych.

Produkty i koprodukty nieskończonych rodzin naogól nie są izomorficzne w kategorii przestrzeni wektorowych.

Obiekt początkowy P to taki obiekt w kategorii $\mathcal{C}$, że dla każdego obiektu A zbiór morfizmów $Mor_{\mathcal{C}}(P, A)$ jest jednoelementowy.

Obiekt końcowy K to taki obiekt w kategorii $\mathcal{C}$, że dla każdego obiektu A zbiór morfizmów $Mor_{\mathcal{C}}(A, K)$ jest jednoelementowy.

Jądro różnicowe (uogólnienie definicji jądra): Dane dwa przekształcenia $f, g : V \to W$. Jądro różnicowe to taki morfizm $\iota : K \to V$ spełniający $f\iota = g\iota$ oraz mający własność uniwersalną: dla każdego morfizmu $h : Z \to W$ tahiego, że $fh = gh$ istnieje dokładnie jeden morfizm $h_0 : Z \to K$ taki, że $h = \iota h_0$.

1.1. Sformułować definicję kojądra różnicowego i udowodnić, że kojądra istnieją w kategorii przestrzeni wektorowych i w kategorii zbiorów.

1.2. Powiemy, że obiekty X, Y w kategorii $\mathcal{C}$ są izomorficzne jeśli istnieją morfizmy $f : X \longrightarrow Y$ oraz $g : Y \longrightarrow X$ takie, że $gf = id_X$ oraz $fg = id_Y$.

(a) Udowodnić, że jeśli w kategorii mamy dwa obiekty początkowe, to są one izomorficzne.

(b) Udowodnić, że jeśli w kategorii mamy dwa obiekty końcowe, to są one izomorficzne.

1.3. Pokazać, że jeśli w kategorii $\mathcal{C}$ istnieje obiekt początkowy i pushouty, to istnieją też koprodukty.

1.4. Pokazać, że jeśli w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją koprodukty i kojądra różnicowe, to isnieją też pushouty.

1.5. Pokazać, że jeśli w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją produkty i pullbacki, to istnieją też jądra różnicowe.

1.6. ($\star$) Pokazać, że jeśli w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją kojądra różnicowe i pullbacki, to istnieją też jądra różnicowe.

2 O przestrzeniach ilorazowych

2.1. Niech $W \subset V$. Wyznaczyć wszystkie warstwy W w V (tzn elementy przestrzeni ilorazowej) V/W dla $V = \mathbb{Z}_2^3$, $W = \{(0,0,0),(1,1,1)\}$.

2.2. Niech P będzie przestrzenią funkcji wielomianowych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Określamy $W = \{p \in P : p(0) = p(1)\}$ oraz $V = \{p \in P : p(0) = p(1) = 0\}$. Pokazać, że $P/W \simeq \mathbb{R}$ oraz $P/V \simeq \mathbb{R}^2$.

2.3. Niech $W \subset V$. Wykazać, że wszystkie warstwy W w V są równoliczne.

2.4. Uzupełnić szczegóły dowodu stwierdzenia: Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym oraz niech $C(A)$ oznacza zbiór funkcji ciągłych na A. Wtedy $C(A) \simeq C(\mathbb{R})/I(A)$, gdzie $I(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) \,|\, \forall x \in A\,, f(x) = 0\}$.

2.5. Niech A z powyższego zadanią będzie zbiorem 2-elementowym, $A = \{x, y\}$. Wykazać, że każda warstwa $C(\mathbb{R})$ względem podprzestrzeni $I(A)$ jest postaci

$$X_{a,b} = \{f \in C(\mathbb{R}) \ : \ f(x) = a, \ f(y) = b\}$$

dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$

2.6. Niech V będzie przestrzenią liniową, oraz niech $W \subseteq V$ oraz $U \subseteq W$. Pokazać, że W/U utożsamiać można z podprzestrzenią przestrzeni V/U oraz wskazać izomorfizm przestrzeni $(V/U)/(W/U)$ oraz V/W.

3 Endomorfizmy

Wieloman charakterystyczny. Wektory i wartości własne.

3.1. Znaleźć wartości własne macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}.$$

3.2. Niech $v^T = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz niech $A = v \cdot v^T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Znaleźć wszystkie wektory własne macierzy $A + \lambda I$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.3. Zbiór macierzy kwadratowych $\{A_1, \dots, A_k\}$ nad ciałem K tworzy grupę ze względu na operację mnożenia. Niech $M = A_1 + \ldots + A_k$. Pokazać, że M ma co najwyżej dwie wartości własne.

3.4. Udowodnić, że jeżeli przekształcenie liniowe $f\colon V \longrightarrow V$ przestrzeni liniowej nad K ma $n = \dim V$ różnych wartości własnych i dla $h\colon V \longrightarrow V$ zachodzi $fh = hf$, to istnieje baza V złożona z wektorów własnych h.

3.5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem charakterystyki 0. Pokazać, że jeśli $\phi : V \to V$ jest endomorfizmem i $\operatorname{tr}\phi = 0$, to istnieje baza $\mathcal{A}$, w której macierz ϕ ma wyłącznie zera na przekątnej.

3.6. Pokazać, że jeśli A jest macierzą kwadratową nad ciałem $\mathbb{F}$ oraz $p \in \mathbb{F}[x]$ jest wielomianem, to jeśli γ jest wartością własną macierzy A, wówczas $p(\gamma)$ jest wartością własną macierzy $p(A)$. Czy każda wartość własna macierzy $p(A)$ jest postaci $p(\lambda)$, dla pewnej wartości własnej λ macierzy A?

3.7. Niech $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ oraz niech $n > 0$. Przypuśćmy, że pewne $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ spełniają równość $fg - gf = \alpha \cdot f$. Pokazać, że dla wszystkich $k \geq 1$ mamy $f^k g - g f^k = \alpha k \cdot f^k$. Pokazać też, że istnieje $k \geq 1$ takie, że f^k jest przekształceniem zerowym (czyli f jest nilpotentne).

3.8. Wykazać równość wielomianów charakterystycznych $W_{\phi\psi} = W_{\psi\phi}$ dla dowolnych $\phi, \psi \in End(V)$.

3.9. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, przy czym rząd $\operatorname{rank} C = r$. Pokazać, że jeżeli $A \cdot C = C \cdot B \in M_{n\times m}$, to wielomiany charakterystyczne macierzy A i B maja wspólny dzielnik stopnia r.

3.10. Niech $f : V \to V$ będzie izomorfizmem przestrzeni n–wymiarowej. Wyrazić wielomian charakterystyczny $W_{f^{-1}}$ w terminach wielomianu W_f.

Podprzestrzenie niezmiennicze

3.11. Niech $f, h \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Niech $fh = hf$ Pokazać, że jądro $\ker(f)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu h.

3.12. Pokazać, że $\ker f^k$ i $\operatorname{im} f^k$ są niezmienniczymi podprzestrzeniami dowolnego endomorfizmu $f : V \to V$.

3.13. Niech f będzie endomorfizmem $\mathbb{R}^4$, zadanym wzorem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_3, 0, 0)$. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne. Czy istnieją f niezmiennicze podprzestrzenie dwuwymiarowe $W, Y \subseteq \mathbb{R}^4$, dla których $R^4 = W \oplus Y$?

3.14. Niech V będzie przestrzenią przestrzenią linową wielomianów o współczynnikach w ciele K. Niech $\phi\colon V \longrightarrow V$ będzie różniczkowaniem. Dla przekształcenia ϕ znaleźć:
a) podprzestrzenie niezmiennicze
b) wartości własne
c) wektory własne

Diagonalizowalność

3.15. Niech X będzie skończonym niepustym zbiorem, a $A \subseteq X$ ustalonym podzbiorem. Zbiór $\mathcal{P}(X) = \mathbb{Z}_2^X$ wszystkich podzbiorow jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$. Niech $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ będzie endomorfizmem $f(Y) = A \cap Y$. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne. Czy endomorfizm f jest diagonalizowalny?

3.16. Znaleźć wielomian charakterystyczny i zbadać diagonalizowalność macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

(Taka macierz nazywa się cykliczną.)

3.17. Niech endomorfizm $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie dany wzorem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$$

. Wykazać, że f jest diagonalizowalny i znaleźć bazę złożoną z wektorów własnych.

3.18. Udowodnić, że macierz rozmiaru $n \times n$ postaci $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1\dots n}$, gdzie

$$a_{ij} = (j - i) \mod n$$

jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$.

3.19. Wykazać, że jeśli $\phi : V \to V$ jest przekształceniem liniowym skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$ takim, że $\phi^n = id$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to ϕ jest przekształceniem diagonalizowalnym. Czy stwierdzenie to jest prawdziwe dla przestrzeni nad ciałem liczb rzeczywistych? Czy stwierdzenie to jest prawdziwe dla przestrzeni nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym?

3.20. Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $g\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ będą przekształceniami liniowymi, które w bazach standardowych mają macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbadać, czy istnieją bazy $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{C}^3$ odpowiednio, w których przekształcenia f i g mają macierz diagonalną.

3.21. Zbadać diagonalizowalność (nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$) macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4 Rozkład Jordana

(Trochę zadań rachunkowych, ☹.)

4.1. Znaleźć bazy w $\mathbb{C}^n$ w których przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ ma formę Jordana (i wskazać tę formę) jeżeli w bazie standardowej $e_1, ..e_n$ przekształcenie ma macierz:

$$a)\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4.2. Niech $f\colon V \longrightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$, które w pewnej bazie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ma macierz:

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} i & i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix} \qquad (ii) \quad A = \begin{bmatrix} i & i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Znaleźć bazę, w której macierz ta ma formę Jordana.
b) Znaleźć wszystkie podprzestrzenie $W \subseteq V$ niezmiennicze względem f.

4.3. Macierze A i B poniżej, mają taki sam wielomian charakterystyczny. Ustalić, czy są podobne znajdując postać Jordana dla każdej z nich.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.4. Obliczyć A^{2013}, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ lub $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Wynik podać w postaci $C\,D\,C^{-1}$

4.5. Znaleźć formę Jordana macierzy nad $\mathbb{C}$:

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & ... & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{bmatrix}.$$

4.6. Załóżmy, że $char(\mathbb{K}) \neq 3$. Niech $\phi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ.

4.7. Niech $\phi : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ. Odpowiedź uzależnić od charakterystyki ciała.

4.8. Dane jest przekształcenie $\phi : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$. Wiemy, że wartości własne ϕ to 1 i 2. Ponadto wiemy, że

$$1) \quad \dim(ker(\phi - Id)) = 2, \quad \dim(ker((\phi - Id)^2)) = 4,$$

$$2) \quad \dim(ker(\phi - 2Id)) = 1, \quad \dim(ker((\phi - 2Id)^2)) = 2.$$

Jakiej postaci Jordana może być macierz ϕ?

4.9. Korzystając z formy Jordana, pokazać, że każda macierz nad $\mathbb{C}$ jest produktem dwóch macierzy symetrycznych.

4.10. Niech $f : V \to V$ i niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią cykliczną. Czy zawsze istnieje $U \subset V$ niezmiennicza, taka że $W \oplus U = V$?

4.11. Niech $f\colon V \longrightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{K}$. Pokazać, że istnieją niezmiennicze podprzestrzenie W i U, takie że $f_{|W} : W \to W$ jest przekształceniem nilpotentnym, a $f_{|U} : U \to U$ izomorfizmem, $V = U \oplus W$. Pokazać, że przestrzenie W i U są wyznaczone jednoznacznie.

4.12. Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem, którego macierz Jordana składa się z klatek odpowiadającym różnym wartościom własnym. Pokazać, że istnieje baza, w której macierz tego przekształcenia jest cykliczna, tzn jak w zad. 3.16.

4.13. Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Pokazać, że każda macierz jest podobna do swojej transponowanej.

4.14. Pokazać, że jeżeli jedyną wartością własną macierzy A nad $\mathbb{C}$ jest 1, to dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ macierz A^k jest podobna do macierzy A.

4.15. Wielomian charakterystyczny macierzy A nad $\mathbb{R}$ jest równy $(\lambda - 5)^5(\lambda - 1)^2$, $\dim\ker(A - 5I) = 2$, $\dim\ker(A - 5I)^2 = 4$, $\ker(A - I) \cap im(A - I) \neq \{0\}$. Znaleźć formę Jordana. Uzasadnić starannie odpowiedź.

4.16. Rozpatrzmy endomorfizm $\phi : V \to V$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K.

(a) Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią ϕ – niezmienniczą i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami własnymi endomorfizmu ϕ o parami różnych wartościach własnych. Wykazać, że jeśli zachodzi $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k \in W$, to $\alpha_i \in W$ dla $i = 1, ..., k$.

(b) Wykazać, że jeśli V jest skończenie wymiarowa i K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to: endomorfizm ϕ jest diagonalizowalny $\iff$ $(*)$ dla każdej podprzestrzeni ϕ -niezmienniczej $W \subset V$ istnieje podprzestrzeń ϕ –niezmiennicza $W' \subset V$ taka, że $V = W \oplus W'$.

4.17. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Załóżmy, że char $\mathbb{K} = 0$ lub char $\mathbb{K} > \dim V$. Dany operator A działający na V. Pokazać, że jeśli $tr(A^k) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots \dim V$, to A jest nilpotentny.

4.18. Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad $\mathbb{R}$ i niech $A : V \to V$ będzie endomorfizmem, takim, że $A^2 = -Id$. Udowodnić, że wymiar V jest podzielny przez 2.

4.19. Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad $\mathbb{Q}$ i niech $A : V \to V$ będzie endomorfizmem, takim, że $A^5 = Id$. Załóżmy, że 1 nie jest wartością własną. Udowodnić, że wymiar V jest podzielny przez 4.

4.20. Znaleźć wielomian minimalny macierzy A oraz podać przykład wielomianu $p \in \mathbb{K}[t]$ takiego, że $p(A)$ jest macierzą diagonalizowalną, a $A - p(A)$ jest macierzą nilpotentną, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.21. Niech V, $\dim V > 1$, będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, dla której określone jest działanie mnożenia $\bullet : V \times V \to V$, które wraz z dodawaniem wektorów spełnia aksjomaty ciała z wyjątkiem aksjomatu przemienności mnożenia. Wykazać, że $\dim V$ jest parzysty.

4.22. Niech $J_{\gamma,n} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ będzie klatką Jordana rozmiarów $n \times n$ o wartości własnej $\gamma \in \mathbb{K}$. Przekształcenie liniowe $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ dane jest wzorem $f(v) = J_{\gamma,n}v$, dla $v \in \mathbb{K}^n$. Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie f-niezmiennicze w $\mathbb{K}^n$.

4.23. Niech $\phi : \mathbb{K}^8 \to \mathbb{K}^8$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć wielomian minimalny oraz wyznaczyć bazę Jordana dla ϕ.

5 Przestrzenie afiniczne

5.1. Udowodnić za aksjomatów przestrzeni afinicznej, że jeśli $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ to dla dowolnych punktów $p_1, p_2, \ldots, p_n$ przestrzeni afinicznej E wektor $\sum_{i=1}^n a_i\omega(q, p_i)$ nie zależy od wyboru punktu q.

Oznaczenie: prostą przechodzącą przez punkty $p.q \in E$ oznaczamy przez $L(p, q)$.

5.2. Niech E będzie przestrzenią afiniczną, a $A \subset E$ jej podzbiorem. Załóżmy, że dla dowolnej pary punktów $p, q \in A$ prosta $L(p, q) \subset A$. Czy A jest podprzestrzenią afiniczną?

5.3. Sformułować i udowodnić twierdzenie Talesa w przestrzeni afinicznej nad ciałem $\mathbb{K}$.

5.4. Mówimy, że $p, q, r, s \in E$ jest rówoneległobokiem gdy $\omega(p, q) = -\omega(r, s)$. Udowodnić, że jeśli $char(\mathbb{K}) \neq 2$, to $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s$.

5.5. Twierdzenie Menelaosa. Dane sześć różnych punktów a, b, c, p, q i r w przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{K}$. Przypuśćmy, że punkty p, q i r leżą odpowiednio na prostych $L(b, c)$, $L(c, a)$ i $L(a, b)$:

$$p = \lambda b + (1 - \lambda)c \qquad q = \mu c + (1 - \mu)a \qquad r = \nu a + (1 - \nu)b$$

dla $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$. Udowodnić, że p, q, r są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda\mu\nu = (\lambda - 1)(\mu - 1)(\nu - 1)$.

5.6. Dane sześć różnych punktów a, b, c, p, q i r w przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{K}$. Przypuśćmy, że punkty p, q i r leżą odpowiednio na prostych $L(b,c)$, $L(c,a)$ i $L(a,b)$:

$$p = \lambda b + (1-\lambda)c\,, \qquad q = \mu c + (1-\mu)a\,, \qquad r = \nu a + (1-\nu)b\,.$$

Załóżmy, że żadne dwie proste występujące w zadaniu nie są równoległe. Znaleźć warunek dla $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$ na to, by proste $L(a,p)$, $L(b,q)$ i $L(c,r)$ przecinały się w jednym punkcie. Wsk: Twierdzenie Cevy.

5.7. Niech $E_1 = p + V_1$, $E_2 = q + V_2$ będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej E. Udowodnić, że:

a) $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \iff \omega(p,q) \in V_1 + V_2$

b) jeśli $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ to $\dim < E_1 \cup E_2 >= \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$

c) jeśli $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, to $\dim < E_1 \cup E_2 >= \dim E_1 + \dim E_2 - \dim V_1 \cap V_2 + 1$.

5.8. Niech E_1, E_2 będą dwiema podprzestrzeniami afinicznymi w przestrzeni afinicznej E nad ciałem K. Niech $< E_1 \cup E_2 >= E$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ i niech $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0, 1$ będzie ustalonym elementem. Znaleźć miejsce geometryczne elementów $\lambda x + (1-\lambda)y$, gdzie x i y przebiegają E_1 i E_2 odpowiednio. (Czy to jest podprzestrzeń afiniczna, a jeśli tak, to jak ją opisać?)

5.9. Niech $E_1 = p + V_1$, $E_2 = q + V_2$ będą dwiema skośnymi podprzestrzeniami w przestrzeni afinicznej (tzn $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ i $E_1 \cap E_2 = \emptyset$). Pokazać, że dla każdego punktu $x \notin E_1 \cup E_2$ istnieje conajwyżej jedna prosta P przechodząca przez punkt x i przecinająca E_1 i E_2. Wykazać, że prosta istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in < E_1 \cup E_2 >$ ale $\omega(p,x) \notin V_1 + V_2$ i $\omega(q,x) \notin V_1 + V_2$.

5.10. Niech $p = [-1,-1,1] \in \mathbb{R}^3$ i $L = [2,3,5] + \mathrm{lin}\{(1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Znaleźć równanie płaszczyzny w $H \subset \mathbb{R}^3$ zawierającej punkt p i prostą L.

(b) Niech prosta L' będzie opisana układem równań

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = 17 \end{cases}.$$

Sprawdzić, że istnieje prosta $K \subset \mathbb{R}^3$ zawierająca p i przecinająca proste L oraz L' i znaleźć punkty przecięcia prostej K z prostymi L i L'.

5.11. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ dany jest punkt $c = [4,5,2,7]$ oraz dwie proste:
L przechodząca przez punkty $a_1 = [1,1,1,1]$, $a_2 = [0,-1,0,1]$
K przechodząca przez punkty $b_1 = [2,2,3,1]$, $b_2 = [1,2,2,-2]$
(a) Znaleźć prostą N przechodzącą przez punkt c i przecinającą proste L i K. Znaleźć punkty przecięcia L z N i K z N.
(b) Znaleźć prostą K', taką by L i K' były skośne i by nie istniała prosta zawierająca punkt c i przecinająca L i K'.

5.12. Znaleźć bazę punktową $\mathrm{af}(L_1 \cup L_2) \subset \mathbb{K}^3$, gdzie $L_1 = \{[4,1,0] + t(2,3,-1) : \ t \in \mathbb{K}\}$, $L_2 = \{[2,-2,1] + t(1,0,1)\}$.

5.13. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ znaleźć przedstawienie parametryczne oraz układ równan opisujący podprzestrzen afiniczną generowaną przez punkty:

a) $\{[-1,1,0,1],[0,0,2,0],[-3,-1,5,4],[2,2,-3,-3])\}$

b) $\{[1,1,1,-1],[0,0,6,-7],[2,3,6,-7],[3,4,1,-1]\}$
Przestrzenie te przedstawić jako przecięcia hiperpłaszczyzn w $\mathbb{R}^4$. (Hiperpłaszczyzna = przestrzeń kowymiaru jeden.)

5.14. Dana jest przestrzeń afiniczna wymiaru n, jej baza punktowa oraz $n+1$ punktów q_i. Niech $a_{i,0}, \ldots, a_{i,n}$ będą współrzednymi barycentrycznymi punktu q_i. Wykazać, że $det(a_{i,j}) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy punkty są w położeniu szczególnym.

5.15. W przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ przez i-tą mediane układu punktów $a_1, \ldots, a_n$, gdzie $n > 2$, rozumiemy prostą łączącą punkt a_i oraz punkt o współrzędnych barycentrycznych $\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{n-1}$. Pokazać, że wszystkie mediany tego układu przecinają się w jednym punkcie i wyznaczyć go.

5.16. Jeśli $TF_1 \subset TF_2$ (tzn F_1 jest słabo równolełe do F_2), oraz $F_1 \not\subset F_2$ to $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

6 Przekształcenia afiniczne

6.1. Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że $F(p_i) = q_i$, gdzie $p_0 = [2,1]$, $p_1 = [1,2]$, $p_2 = [1,1]$
a) $q_0 = [1,1]$, $q_1 = [1,2]$, $q_2 = [0,1]$
b) $q_0 = [4,1]$, $q_1 = [3,3]$, $q_2 = [2,1]$
c) $q_0 = [3,1]$, $q_1 = [3,2]$, $q_2 = [2,1]$.
Znaleźć punkty stałe i proste niezmiennicze przekształcenia F. (Punkt $p \in E$ jest stałym dla przekształcenia F gdy $F(p) = p$. Prosta $L \subset E$ jest niezmiennicza ze względu na przekształcenie F gdy $F(L) \subset L$.)

6.2. Czy istnieje przekształcenie afiniczne $\mathbb{R}^4$, które punkty a_i przekształca na punkty b_i odpowiednio, zaś prostą P na prostą H. Jeżeli takie przekształcenie istnieje to znaleźć jego postać analityczną i ustalić, czy jest ono wyznaczone jednoznacznie.

a)

$$\begin{aligned} a_0 &= [1,1,1,1] & b_0 &= [-1,1,-1,1] \\ a_1 &= [2,3,2,3] & b_1 &= [0,4,0,4] \\ a_2 &= [3,2,3,2] & b_2 &= [2,2,2,2] \end{aligned}$$

$P = [1,2,2,2] + t(0,1,0,1)$
$H = [-1,2,0,3] + s(1,-5,1,-5)$

b)

$$\begin{aligned} a_0 &= [2,-1,3,-2] & b_0 &= [1,-2,3,5] \\ a_1 &= [3,1,6,-1] & b_1 &= [2,1,8,7] \\ a_2 &= [5,1,4,1] & b_2 &= [3,2,10,-6] \end{aligned}$$

$P = [2,0,4,-1] + t(0,1,2,0)$
$H = [1,-1,5,-2] + s(0,2,3,-3)$

6.3. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ podprzestrzeń H zadana jest równaniami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}.$$

Niech f będzie rzutem wzdłuż $\mathrm{lin}\{(1,0,-1,1),(0,1,1,0)\}$ na H.

a) Znaleźć przeciwobraz prostej $L = [1,0,1,0] + s(1,-1,1,1)$.

b) Znaleźć układ równań opisujący obraz płaszczyzny $K = [1,0,1,0] + \mathrm{lin}\{(1,1,0,1),(0,0,0,1)\}$.

6.4. Niech $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bdzie przekształceniem afinicznym. Wykazać, że jeśli f przeprowadza parę prostych skośnych na parę prostych równoległych, to f nie jest różnowartościowe. Podać przykład takiego przekształcenia.

6.5. Niech $K, L, M \subset \mathbb{K}^3$ będzie trójką prostych parami skośnych. Czy każdą taką trójkę można przekształcić na dowolną inną za pomocą izomorfizmu afinicznego? Jeśli nie, to orzec, które z trójek są afinicznie równoważne: $(K,L,M) \sim (K',L',M')$ gdy istnieje $\phi \in Aff(\mathbb{K}^3)$ tali, że $\phi(K) = K'$, $\phi(L) = L'$, $\phi(M) = M'$.

6.6. Niech $\phi : E \to E$ będzie przekształceniem afinicznym. Wykazać, że jeżeli E jest przestrzenią skończenie wymiarową i przekształcenie ϕ ma dokładnie jeden punkt stały, to każda podprzestrzeń ϕ–niezmiennicza zawiera ten punkt stały.

6.7. Znaleźć wzór analityczny przekształcenia afinicznego $\mathbb{K}^4$ będącego rzutem na H wzdłuż W w przypadku, gdy podprzestrzeń H jest dana równaniem $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = k$, zaś $W = \mathrm{lin}\{[a,b,c,d]\}$.

6.8. Niech $\phi\colon E \longrightarrow E$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że 1 nie jest wartością własną $D\phi$. Pokazać, ϕ ma dokładnie jeden punkt stały.

7 Przestrzenie i przekształcenia rzutowe

Patrz osobny plik
http://www.mimuw.edu.pl/~aweber/zadania/gal2017gw/Przestrzenie_rzutowe-zadania.pdf .
Do zrobienia na ćwiczeniach: zadania 53.3, 53.4, 53.14, 53.16, 53.22(!!!).

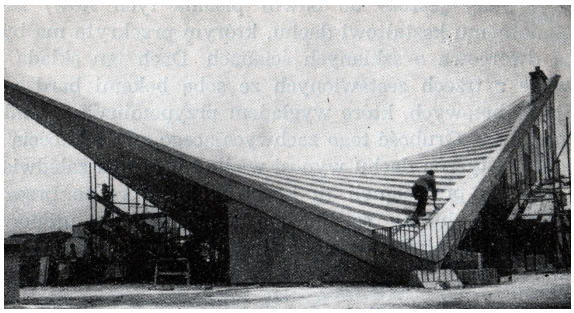
7.1. Znaleźć przekształcenie rzutowe przeksztacające kwadrykę (opisaną w przestrzeni afinicznej) równaniem $x^2 - y^2 = 2z$ na kwadrykę opisaną równaniem $x^2 + y^2 = 1 + z^2$.

7.2. Znaleźć przekształcenie liniowe, które rzeczywistą formę kwadratową sprowadza do postaci kanonicznej:

a) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$

b) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

7.3. Znaleźć przekształcenie wielomianowe $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ będące bijekcją na obraz, który jest opisany równaniem $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$.



Uwaga: Nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki $\neq 2$ każda nieosobliwa kwadryka (tzn. taka, że macierz odpowiadajacej jej formy dwuliniowej symetrycznej jest odwracalna) w $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ jest w pewnym układzie współrzędnych kwadryką zadaną równaniem $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$.

7.4. Niech $f \in \mathbb{K}[x, y]$ bedzie niezerowym wielomianem jednorodnym, stopnia d. Wówczas równanie $f(x, y) = 0$ ma co najwyżej d rozwiązań w $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, a jeśli ciało jest algebraicznie domknięte, to dokładnie d (licząc krotności). *Uwaga. Jeśli* $[a : b]$ *jest rozwiązaniem to krotność jest największą potęgą* $(bx - ay)$ *dzielącą* f.

W zadaniach niżej $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte i $char(\mathbb{K}) \neq 2$.

7.5. Niech $f \in \mathbb{K}[x, y, z, t]$ będzie wielomianem jednorodnym stopnia 2, zaś $Q \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ - kwadryką opisaną równaniem $f = 0$. Niech ℓ będzie prostą w $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$. Pokazać, że $Q \cap \ell$ jest zawsze niepusty. Co więcej Q zawiera ℓ wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera trzy punkty tej prostej.

7.6. Niech $\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3$ będą parami rozłącznymi prostymi w $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$. Istnieje wówczas nieosobliwa kwadryka $Q \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ zawierająca te proste.

8 Formy dwuliniowe

UWAGA: W zadaniach o formach dwuliniowych zakładamy, że $\mathbb{K}$ jest ciałem charakterystyki różnej od 2.

8.1. Wyznaczyć macierz formy dwuliniowej na $\mathbb{R}^3$ w bazie $e_1' = e_1 + e_2,\ e_2' = e_1 - e_2,\ e_3' = 2e_1 + e_2 + e_3$ gdy dana jest macierz w bazie standardowej $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

8.2. Dana jest przestrzeń liniowa z formą symetryczną (V, ϕ) , $W \subset V$. Pokazać, że

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V + \dim(V^{\perp} \cap W)\,.$$

8.3. Dane macierze:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 35 & -25 \\ -25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Które z tych macierzy są kongruentne nad $\mathbb{Q}$?

8.4. Niech A będzie symetryczną niezdegenerowaną macierzą kwadratową o wyrazach wymiernych. Udowodnić, że macierze

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

są kongruentne nad $\mathbb{Q}$. (Powyżej macierz I oznacza macierz jednowtkową rozmiaru A.)

8.5. Dane macierze $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Nad którymi z następujących ciał powyższe macierze są kongruentne: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$?

8.6. Czy istnieje macierz rzeczywista symetryczna 4×4, której znaki minorów są nastepujące?
a) $-$, $+$, 0 , $-$
b) $-$, $+$, 0 , $+$
Czy znamy sygnaturę tej macierzy?

8.7. W przestrzeni z formą symetryczną $(\mathbb{R}^4, \phi)$, gdzie ϕ w bazie standardowej jest zadane przez macierz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) znaleźć bazę prostopadłą tej przestrzeni.

b) znaleźć $W^\perp$, gdzie W jest podprzestrzenią zadaną przez układ równań:

$$\begin{aligned} x_2 \quad\quad &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Czy $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$? Czy forma $\phi_{|W \times W}$ jest niezdegenerowana?

c) znaleźć stożek wektorów izotropowych.

Definicja *Podprzestrzeń $W \subset V$ nazywamy całkowicie zdegenerowaną (ze względu na formę symetryczną ϕ), jeżeli $\phi_{|W \times W}$ jest formą zerową.*

Wektor v nazywa się izotropowy (ze względu na formę symetryczną ϕ) gdy $\phi(v, v) = 0$.

8.8. W przestrzeni W macierzy 2×2 o współczynnikach rzeczywistych rozpatrujemy formę dwuliniową $\phi(A, B) = tr(AB)$. Znaleźć największy wymiar podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej.

Definicja *Przestrzeń z formą symetryczną zadaną w pewnej bazie przez macierz*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nazywa się płaszczyzną hiperboliczną.

8.9. Udowodnić, że płaszczyzna hiperboliczna zawiera wektor α, taki że $\text{lin}\{\alpha\}^\perp = \text{lin}\{\alpha\}$.

8.10. Dla niezdegenerowanej formy (V, ϕ) nad ciałem charakterystyki różnej od 2 następujące warunki są równoważne:

a) (V, ϕ) jest sumą ortogonalną płaszczyzn hiperbolicznych

b) istnieje podprzestrzeń $W \subset V$, taka, że $W^\perp = W$

c) w pewnej bazie macierz ϕ ma postać:

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie I jest macierzą identyczności

d) $V = W_1 \oplus W_2$, gdzie W_1 i W_2 są całkowicie zdegenerowane.

8.11. Rozpatrujemy formę symetryczną nad $\mathbb{R}$ o macierzy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wykazać, że płaszczyzny hiperboliczne o których mowa w a) zadaniu powyższym nie są wyznaczone jednoznacznie.

W powyższym zadaniu b) przestrzeń W nie jest wyznaczona jednoznacznie.

8.12. Niech (V, ϕ) będzie rzeczywistą przestrzenią wymiaru $2n$ z formą symetryczną. Niech V będzie sumą ortogonalną n-wymiarowych podprzestrzeni V_+ i V_- takich, że ϕ jest dodatnio określona na V_+ i ujemnie określona na V_-. Udowodnić, że:

a) Każda podprzestrzeń (V, ϕ) całkowicie zdegenerowana ma wymiar nie większy niż n;

b) Istnieje podprzestrzeń (V, ϕ) całkowicie zdegenerowana wymiaru n;

c) Każda podprzestrzeń całkowicie zdegenerowana jest zawarta w n wymiarowej podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej.

9 Przestrzenie z iloczynem skalarnym

W poniższych zadaniach:
,,przestrzeń euklidesowa" = ,,skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym".

9.1. Niech A będzie macierzą formy 2-liniowej w $\mathbb{R}^n$ w bazie standardowej. Wykazać, że jeśli A jest macierzą iloczynu skalarnego, to dla każdego $n > 0$ macierz A^n też jest macierzą iloczynu skalarnego.

9.2. Wykazać, że funkcja $f(t) = 1$ wraz z funkcjami $\sin(nt)$, $\cos(nt)$ dla $n \in \mathbb{N}_{>0}$ stanowią układ ortogonalny w przestrzeni funkcji okresowych o okresie 2π z iloczynem skalarnym zadanym przez

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx\,.$$

9.3. Zastosować metodę ortogonalizacji Gramma-Schmidta do bazy $1, x, x^2, .., x^n$ w przestrzeni wielomianów stopnia $\leq n$ z iloczynem skalarnym $(f, g) = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$. Wypisać kilka pierwszych wielomianów. Postarać się samodzielnie znaleźć wzór ogólny, lub przejrzeć notatki z wykładu.

9.4. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć bazę ortonormalną złożoną z wektorów postaci $\frac{1}{2}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, gdzie $a_i \in \{-1, 1\}$. (Macierz Hadamarda.)

9.5. Pokazać, że jeśli w liniowej przestrzeni z iloczynem skalarnym $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą ortonormalną zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jest układem wektorów takim, że $\sum_{i=1}^{i=n} \|\beta_i\|^2 < 1$, to układ $\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n$ jest liniowo niezależny.

9.6. a) Wykazać że forma 2-liniowa $\phi(A, B) = -Tr(AB)$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej antysymetrycznych macierzy $n \times n$.
b) Niech $C \in O(n)$. Wykazać, że jeśli A jest macierzą antysymetryczną, to CAC^{-1} też jest macierzą antysymetryczną. Ponadto $A \mapsto CAC^{-1}$ jest izometrią przestzreni macierzy antysymetrycznych ze względu na formę ϕ.

9.7. W przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $\langle A, B\rangle = Tr(AB^T)$ znaleźć, podając jej bazę lub opisujący ją układ równań, podprzestrzeń prostopadłą do podprzestrzeni złożonej z macierzy o śladzie równym 0.

9.8. Niech A będzie macierzą formy 2-liniowej w $\mathbb{R}^n$ w bazie standardowej. Dana jest hiperpłaszczyzna opisana wzorem $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. Podać wzór na odległość wektora od tej hiperpłaszczyzny.

9.9. Pokazać, że wyznacznik Gramma spełnia nierówność:

$$G(\alpha_1, .., \alpha_2, \beta_1, .., \beta_l) \leq G(\alpha_1, .., \alpha_k)G(\beta_1, .., \beta_l)$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $(\alpha_i, \beta_j) = 0$ dla dowolnych $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$ lub conajmniej jeden z układów $\alpha_1, .., \alpha_k$, $\beta_1, .., \beta_l$ jest liniowo zależny.
Wsk: Rzut ortogonalny nie zwiększa objętości.

9.10. Udowodnić że norma L_1 i L_∞ na $\mathbb{R}^n$ nie pochodzą od iloczynu skalarnego.

9.11. Niech B będzie ograniczoną bryłą w $\mathbb{R}^n$ która jest wypukła i środkowo-symetryczna. Ponadto ma niepuste wnętrze i jest domknięta. Wykazać, że istnieje norma w $\mathbb{R}^n$, dla której

$$B = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid ||\alpha|| \leq 1\}.$$

9.12. Udowodnić wzory w $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym:
$||a \times b||^2 + (a, b)^2 = ||a||^2||b||^2$,
$(a \times b, c) = (c \times a, b)$.

9.13. Niech u, v, w będą wektorami w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ o normie 1. Znaleźć minimalną i maksymalną wartość wyrażenia $(u, w) + (w, v) + (v, u)$.

9.14. Niech v_1, v_2, v_3, v_4 będą wektorami w $\mathbb{R}^4$. Pokazać, że jeśli $(v_i, v_j) < 0$ dla $i \neq j$ to pewne trzy z tych wektorów są liniowo niezależne.

9.15. Dane macierze $A, B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$. Wykazać, że jeśli $A^T B = 0$ to $r(A) + r(B) = r(A|B)$. Czy twierdzenie jest prawdziwe nad $\mathbb{C}$?

10 Izometrie liniowe przestrzeni z iloczynem skalarnym

10.1. Wykazać, że dla ciała $\mathbb{K}$ zbiór

$$O_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n} \mid A^T A = I\}$$

jest podgrupą grupy macierzy odwracalnych.

10.2. Niech f, g będą endomorfizmami przestrzeni euklidesowej V takimi, że dla każdego $v \in V$ mamy $(f(v), f(v)) = (g(v), g(v))$. Pokazać, że istnieje przekształcenie ortogonalne h takie, że $f = hg$.

10.3. Niech u $\in V$ bdzie wektorem o normie 1 w przestrzeni euklidesowej V. Określamy $f(x) = x - 2(x, u)u$, dla $x \in V$. Pokazać, że:
- f jest ortogonalne,
- wyznacznik macierzy przekształcenia f jest równy -1,
- macierz f ma w każdej bazie ortonormalnej posta $I - 2vv^T$, gdzie v to pewien wektor kolumnowy,
- jeśli g jest przekształceniem ortogonalnym o wartości własnej 1 takim, że podprzestrzeń wasna V_1 jest wymiaru $\dim(V) - 1$, to $g(x) = x - 2(x, w)w$, dla pewnego wektora $w \in V$ takiego, że $||w|| = 1$.

10.4. Wykazać, że jeśli A jest macierzą przekształcenia ortogonalnego f w bazie ortogonalnej, to f jest symetrią wtedy i tylko wtedy gdy macierz A symetryczna.

10.5. Pokazać, że jeżeli (V, ϕ) przestrzenią z iloczynem skalarnym, $\phi(\alpha, \alpha) = \phi(\beta, \beta) \neq 0$, to istnieje symetria ortogonalna $f\colon V \longrightarrow V$, taka że $f(\alpha) = \beta$.

10.6. Pokazać, że każde przekształcenie ortogonalne przestrzeni euklidesowej wymiaru n jest złożeniem co najwyżej n symetrii prostopadłych.

10.7. Udowodnić, że złożenie dowolnej liczby obrotów przestrzeni liniowej euklidesowej trójwymiarowej jest obrotem.

10.8. Przekształcenie przestrzeni euklidesowej zadane jest, w kanonicznej bazie ortonormalnej e_1, e_2, e_3 macierzą:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Przedstawić to przekształcenie w postaci złożenia co najwyżej trzech symetrii prostopadłych względem płaszczyzn.

10.9. Rozpatrujemy $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Znaleźć macierz w bazie standardowej i wzór analityczny opisujący rzut prostopadły na podprzestrzeń $W = \mathrm{lin}\{(1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)\}$.

10.10. Przekształcenie ortogonalne $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ przestrzeni euklidesowej ze standardowym iloczynem skalarnym ma w standardowej bazie ortonormalnej macierz:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Znaleźć bazę ortonormalną, w której przekształcenie f ma formę kanoniczną. Znaleźć tę formę. Opisać geometrycznie czym jest to przekształcenie. Jeśli któryś z bloków jest obrotem, to proszę podać kąt obrotu.

10.11. Znalezć warunki konieczne i dostateczne na to, by by zbiór liczb dodatnich $\{a_{ij}\colon 0 \geq j \geq n, i > j\}$ był

1. zbiorem odległości wszystkich możliwych par wierzchołków n wymiarowego sympleksu w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$,
2. zbiorem odległości wszystkich możliwych par punktów pewnego zbioru $n+1$ punktów przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ (to znaczy nie zakładamy tak jak w a), że punkty są w położeniu ogólnym).

10.12. Niech $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ będzie macierzą ortogonalną i $\det A = 1$. Pokazać, że

1. $(\mathrm{tr}\, A)^2 - \mathrm{tr}\, A^2 = 2\,\mathrm{tr}\, A$
2. $((\sum_{i=1}^{3} a_{ii}) - 1)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq 3}(a_{ij} - a_{ji})^2 = 4$

10.13. Pokazać,że jeżeli $w(\lambda)$ jest wielomianem charakterystycznym $n \times n$ macierzy ortogonalnej A. Pokazać, że $\lambda^n w(\lambda^{-1}) = \pm w(\lambda)$.

10.14. Pokzać, że jeśli przekształcenie liniowe przestrzeni z iloczynem skalarnym $f : V \to V$ zachowuje kąty (a ściślej $\cos(\sphericalangle(\alpha,\beta))$ dla dowolnej pary wektorów), to f jest postaci $c\,g$, gdzie c jest stałą, a g przekształceniem ortogonalnym (izometrią).

11 Przestrzenie i przekształcenia unitarne

11.1. Załóżmy, że dla pewnego $n > 1$ macierz A^n jest unitarna. Czy wynika stąd, że A jest macierzą unitarną?

11.2. Załóżmy, że dla pewnego endomorfizmu f przestrzeni unitarnej V mamy równość $f^2 = -id$. Czy f jest przekształceniem unitarnym?

11.3. Niech f będzie automorfizmem przestrzeni unitarnej $(V, \langle\langle,\rangle\rangle)$ takim, że $f^n = id$, dla pewnego n. Pokazać, że na V można zadać (nową) strukturę $\langle\langle,\rangle\rangle'$ przestrzeni unitarnej tak, że f jest przekształceniem unitarnym przestrzeni dwuliniowej$(V, \langle\langle,\rangle\rangle')$.

11.4. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej V spełniającym warunek

$$\langle\langle f(u), v\rangle\rangle = -\langle\langle u, f(v)\rangle\rangle,$$

dla każdych $u, v \in V$. Pokazać, źe jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością własną f, to $re(\lambda) = 0$.

11.5. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej V. Pokazać, że dla każdego wektora jednostkowego $x \in V$ zachodzi nierówność:

$$\langle\langle f(x), x\rangle\rangle\langle\langle x, f(x)\rangle\rangle \leq \langle\langle f(x), f(x)\rangle\rangle.$$

W szczególnosci dla macierzy $A \in M_n(\mathbb{C})$ mamy $|\langle\langle Ax, x\rangle\rangle| \leq ||Ax||$, gdzie równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $||x|| = 1$ oraz x jest wektorem własnym A.

11.6. Niech V będzie przestrzenia unitarną. Dla endomorfizmu f przestrzeni V określamy ,,ciało wartości" $W(f) \subset \mathbb{C}$ (,,numerical range") przekształcenia f przez

$$W(f) = \{\langle\langle f(x), x\rangle\rangle \mid x \in V,\ ||x|| = 1\}.$$

(a) Pokazać, że $W(f+cI) = W(f) + c$ oraz $W(cf) = cW(f)$, dla każdego $c \in \mathbb{C}$.

(b) Pokazać, że wartości własne f należa do $W(f)$,

(c) Opisać postać geometryczną $W(f)$ w przypadku, gdy macierz f jest postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix}.$$

(d) W przestrzeni l^2 ciągów liczb zespolonych $(x_0, x_1, \ldots)$, dla których $\sum_i |x_i|^2 < \infty$ z iloczynem hermitowskim $\langle\langle x, y \rangle\rangle = \sum_i a_i \overline{b_i}$ rozważmy operator f zadany przez

$$f(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Pokazać, że $W(f) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z < 1\}$.

11.7. Niech V będzie przestrzenią z iloczynem hermitowskim, $\dim V < \infty$. Definiujemy normę w $End(V)$:

$$||f|| = sup\{||f(v)|| \ : \ ||v|| = 1 \ \}.$$

Udowdnić, że to rzeczywiście jest norma. Wykazać, że $||fg|| \leq ||f||\,||g||$. Ponadto $||f^* f|| = ||f^*||\,||f||$.

12 Afiniczne przestrzenie euklidesowe

12.1. Dane $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Niech $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \alpha, x \rangle = b\}$. Podać ogólny wzór na:
– odległości $d(x, H)$
– rzutu ortogonalnego punktu $x \in \mathbb{R}^n$ na H
– symetrii prostokątną względem H.

12.2. Znaleźć wzór na symetrię prostokątną euklidesowej przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym względem $lin\{\beta_1, \beta_2\}$, gdzie $\beta_1 = [1, 1, -1, -2]$, $\beta_2 = [5, 8, -2, -3]$.

12.3. Udowodnić, że odległość $d(x_0, H)$ punktu x_0 od podprzestrzeni afinicznej $H = y_0 + S(H)$, gdzie $S(H) = \text{lin}\{\alpha_1, .., \alpha_k\}$, można wyrazić przy pomocy wyznacznika Gramma G:

$$(d(x_0, H))^2 = \frac{G(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k, \omega(x_0, y_0))}{G(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k)},$$

12.4. W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć (conajmniej na dwa sposoby) odległość punktu $(4, 2, -5, 1)$ od podprzestrzeni opisanej przez układ równań:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &= 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 12. \end{aligned}$$

12.5. W przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć odległość punktu $(2, 4, -4, 2)$ od podprzestrzeni danej przez układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - \ \ x_4 &= \ \ 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 &= \ \ 2 \end{aligned}$$

12.6. W przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^4$ dane są proste $L = \{[0, 7, 1, 2] + t(0, 1, -1, 0)\}$ oraz $K = \{[1, 1, 1, 1] + t(1, 0, 0, -1)\}$. Znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez punkt $[4, 1, 3, 1]$, która jest prostopadła do L i nie przecina K.

12.7. Niech H i K bedą podprzestrzeniami euklidesowej przestrzeni afinicznej E i niech $H \cap K = \emptyset$. Pokazać,że istnieje prosta L taka, że $L \perp H$, $L \perp K$, i L ma punkty wspólne z H i z K.

12.8. Pokazać, że jeżeli izometria afinicznej przestrzeni euklidesowej ma dwie niezmiennicze podprzestrzenie afiniczne skośne, to ma punkt stały.

13 Kwadryki w przestrzeni euklidesowej

13.1. Opisać typ kwadryki i znaleźć jej środek symetrii (jeśli istnieje)

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_3 - 8x_1 = 0.$$

13.2. Znaleźć oś symetrii paraboli $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + y = 8$.

13.3. Znaleźć osie kwadryki $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1$.

14 Przekształcenia samosprzężone i twierdzenie spektralne

14.1. Niech ϕ będzie przekształceniem samosprzężonym prestrzeni skończonego wymiaru. Wykazać, że $ker\,\phi \perp im\,\phi$ oraz $ker\,\phi$ i $im\,\phi$ rozpinają całą przestrzeń (ortogonalna suma prosta).

14.2. Niech przekształcenie samosprzężone ϕ przestrzeni euklidesowej będzie dane w pewnej bazie ortonormalnej przez macierz A. Znaleźć ortonormalną bazę wektorów własnych ϕ oraz macierz ϕ w tej bazie. (Uwaga: Zadanie to jest równoważne sformułowaniu: znaleźć macierz ortogonalną B taką, że B^TAB jest macierzą diagonalną. Baza, lub równoważnie macierz B, nie musi być wyznaczona jednoznacznie).

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14.3. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem przestrzeni euklidesowej, takim że f jest samosprzężone i ortogonalne. Pokazać, że f jest symetrią względem pewnej podprzestrzeni wzdłuż podprzestrzeni do niej prostopadłej.

14.4. !!! Dane $0 < k < n$. Niech $A \in End(\mathbb{R}^n)$ zachowuje objętość równoległościanów k-wymiarowych. Pokazać, że A jest izometrią.

14.5. Niech φ będzie przekształceniem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że

a) funkcja $f(x) = (\varphi(\alpha), \alpha)$ osiąga minimum na sferze jednostkowej

b) jeżeli λ_1 jest minimum funkcji f na sferze jednostkowej przyjmowanym w punkcie α_1, to α_1 jest wektorem własnym o wartości własnej λ_1.

c) pokazać, że przestrzeń $lin\{\alpha_1\}^\perp$ jest φ niezmiennicza i opisana w punkcie b) procedura stosowana indukcyjnie prowadzi do znalezienia ciągu rosnącego wartości własnych $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ i odpowiadających im wektorów własnych.

14.6. Operator $A \in End(\mathbb{C}^2)$ jest zadany macierzą

$$\begin{pmatrix} 4+2i & 5+4i \\ 4+3i & 2 \end{pmatrix}$$

Przedstawić A jako złożenie BP operatora samosprężonego dodatnio-określonego P i unitarnego B. (To jest zadanie na rozkład biegunowy.)

14.7. Znałeźć rozkład biegunowy macierzy $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

14.8. Udowodnić, że przekształcenia samosprzężone ϕ i ψ przestrzeni euklidesowej są przemienne (tzn. $\phi\psi = \psi\phi$) wtedy i tylko wtedy, gdy posiadają wspólną ortonormalną bazę wektorów własnych.

14.9. Znaleźć wspólną bazę ortonormalną (względem standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^4$) złożoną z wektorów własnych macierzy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14.10. Niech φ będzie przekształceniem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej takim, że $(\varphi(\alpha), \alpha) \geq 0$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pokazać, że jeżeli dla pewnego wektora α_0, $(\varphi(\alpha_0), \alpha_0) = 0$, to $\varphi(\alpha_0) = 0$;

14.11. Jeśli A jest operatorem samosprzężony, to $\exp(iA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA)^n}{n!}$ jest unitarny. Jeśli B jest unitarny, to istnieje samosprzężony A, taki, że $B = \exp(iA)$.

14.12. Niech $A \in U(n)$. Wykazać, dla każdej liczby naturalnej k istnieje wielomian f (być może zależny od A) taki, że $(f(A))^k = A$.

14.13. Niech A będzie operatorem dodatnio określonym, a B operatorem półdodatnio określonym. Udowodnić że wartości własne AB są rzeczywiste. (Uwaga: nie zakładamy, że $AB = BA$.)

14.14. (**Teoria Hodge'a**) Niech $f : V \to V$ będzie endomorfizmem spełniającym $f^2 = 0$. Niech $\Delta = f^*f + ff^*$. Wykazać, przy załżeniu, że $\dim V < \infty$
1) $ker(\delta) = ker(f) \cap ker(f^*)$
2) $V = ker(\delta) \oplus im(f) \oplus im(f^*)$ i ten rozkład jest ortogonalny.

14.15. Niech A będzie operatorem samosprzężonym przestrzeni $\mathbb{C}^n$ oraz niech $\lambda_{min}(A)$ oraz $\lambda_{max}(A)$ będą odpowiednio najmniejszą i największą wartością własną macierzy A. Pokazać, że:

$$\lambda_{min}(A) = \min_{||x||=1} x^*Ax, \quad \lambda_{max}(A) = \max_{||x||=1} x^*Ax.$$

14.16. Niech A, B będą operatorami samosprzężonymi przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Pokazać, że:

(a) $tr((AB)^k)$ jest liczbą rzeczywistą, dla każdego dodatniego k,

(b) $tr((AB)^2) \leq tr(A^2B^2)$. Kiedy zachodzi równość?

(c) $tr((AB)^2) \leq tr(A^2)tr(B^2)$. Kiedy zachodzi równość?

14.17. Niech A będzie symetryczną rzeczywistą macierzą rozmiarów $n \times n$. Przez $S(A)$ oznaczamy sumę wszystkich wyrazów A. Pokazać, że zachodzi nierówność $S(A)/n \leq S(A^2)/S(A)$.

14.18. Niech $Z \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Pokazać, że $\det(I_m - ZZ^*) = \det(I_n - Z^*Z)$.

Elementy spektralnej teorii grafów

Patrz http://math.mit.edu/~csikvari/spectral_graph_theory.pdf
Definicja. Przez macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego G o zbiorze n wierzchołkow $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz zbiorze krawędzi E rozumiemy macierz symetryczną $M(G) = (m_{ij}) \in M_{n\times n}(\{0, 1\})$ taką, że $m_{ij} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krawędź w G łącząca i oraz j.

14.19. Pokazać, że jeśli G jest grafem prostym (nie ma cykli i wielokrotnych krawędzi) to wartości własne λ_i macierzy sąsiedztwa tego grafu spełniaja równosci $\sum \lambda_i = 0$ oraz $\sum \lambda_i^2 = 2e(G)$, gdzie $e(G)$ oznacza liczbę krawędzi w E. Ogólniej, pokazać, że $\sum \lambda_i^l$ równe jest liczbie zamknietych dróg długości l w G.

14.20. Pokazać, że graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy spektrum jego macierzy sąsiedztwa jest symetryczne względem zera.

14.21. (Twierdzenie Perrona-Frobeniusa) Niech G będzie grafem spójnym oraz $M(G)$ jego macierzą sąsiedztwa . Niech $\lambda_{max}(G)$ będzie największą z wartości własnych macierzy $M(G)$. Pokazać, że:

(a) Jeśli $v \in V_{(\lambda_{max})}$ jest wektorem niezerowym, to żadna jego współrzędna nie jest zerowa.

(b) Krotność λ_{max} jako wartości własnej jest równa 1.

(c) Jeśli $v \in V_{(\lambda_{max})}$ jest wektorem niezerowym, to wszystkie współrzędne v mają ten sam znak.

(d) Niech H będzie podgrafem G. Wówczas $\lambda_{max}(H) \leq \lambda_{max}(G)$, przy czym jeśli H jest właściwy, to nierównosć jest ostra,

(e) Pokazać, że jeśli G jest grafem d-regularnym (każdy wierzchołek jest połaczony z dokladnie d wierzchołkami), to $\lambda_{max}(G) = d$, a krotność $\lambda_{max}(G)$ to liczba składowych spójnych tego grafu. Każdy wektor własny macierzy $M(G)$ o wartości wlasnej d jest stały na każdej składowej.

14.22. Pokazać, że jeśli graf G ma średnicę (odległość między wierzchołkami grafu to długość najkrótszej łączącej je ścieżki, a średnica grafu to maksimum z odległości między jego wierzchołkami) równą d, to liczba róznych wartości własnych macierzy sąsiedztwa tego grafu równa jest przynajmniej $d+1$.

Wsk. $I, A, \ldots, A^d$ są liniowo niezależne.

14.23. Pokazać, że jeśli $\lambda_{\max}$ jest najwiekszą wartością własną macierzy sąsiedztwa grafu $G = (V, E)$ to

$$\max_{v \in V} d(v) \geq \lambda_{\max} \geq \frac{2|E|}{|V|},$$

gdzie $d(v)$ jest stopniem wierzchołka v grafu G.

14.24. (*) Pokazać, że jeśli $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G oraz λ_{max} jest najwiekszą wartością własną macierzy sąsiedztwa grafu G, to $\chi(G) \leq 1 + \lambda_{max}$. (**) Pokazać, że równość zachodzi jedynie dla grafu pełnego oraz dla cyklu o nieparzystej liczbie wierzchołków.

Uwaga. Zagadnieniem wciąż aktualnie badanym jest dolne oszacowanie liczby chromatycznej przy pomocy wartości własnych macierzy sąsiedztwa. Więcej na ten temat można przeczytać na przykład w artykule: http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/viewFile/v19i1p39/pdf.

15 Kwaterniony

15.1. Udowodnić, że jeśli a i b są liczbami całkowitymi będącymi sumami czterech kwadratów liczb całkowitych, to iloczyn ab też jest sumą czterech kwadratów.

15.2. Udowodnić, że wszystkie elementy $h \in \mathbb{H}$ speniające $h^2 = -1$ są sprzężone, tzn jeśli $g^2 = h^2 = -1$, to istnieje element $k \in \mathbb{H}$, taki, że $khk^{-1} = g$.

15.3. Opisać wszystkie sposoby na jakie można zanurzyć $\mathbb{C}$ w $\mathbb{H}$ z zachowaniem działań? (Tu przez zanurzenie rozumiemy przekształcenie $\mathbb{R}$-liniowe $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ takie, że $\phi(1) = 1$ oraz $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Ponieważ $\mathbb{C}$ jest ciałem, więc każde takie przekształcenie automatycznie będzie różnowartościowe.)

15.4. Utożsamiając kwaterniony z macierzami wykazać, że iloczyn skalarny w kwaternionach jest równy $2(x, y) = tr(xy^*)$.

15.5. Pokazać, że $\{q \in \mathbb{H} : qq' = q'q, \forall_{q' \in H}\} = \mathbb{R}$.

15.6. Identyfikujemy zbiór czystych kwaternionów $im\mathbb{H}$ z $\mathbb{R}^3$ przez $q = bi + cj + dk \mapsto (b, c, d)$. Pokazać, że:

(a) Jeśli $q_1, q_2 \in im\mathbb{H}$, to $q_1 q_2 = -(q_1 \circ q_2) + q_1 \times q_2$, gdzie $q_1 \circ q_2$ to iloczyn skalarny reprezentantów q_1, q_2 elementów q_1, q_2 w $\mathbb{R}^3$, a $q_1 \times q_2$ to iloczyn wektorowy,

(b) Pokazać, że $\frac{1}{2} \cdot (q_1 q_2 q_3 - q_2 q_3 q_1) = q_1 \times (q_2 \times q_3)$.

Grupa Lorentza

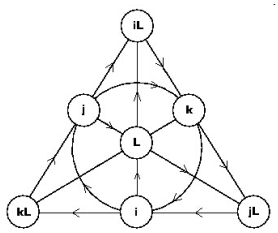
15.7. ♠ Każde przekształcenie liniowe zachowujące stożek $t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ jest postaci $const \cdot \phi$, gdzie $\phi \in O(1, 3)$.

15.8. ♠ Rozważyć odwzorowanie $\rho : SL_2(\mathbb{C}) \to SO(1, 3)$ opisane w §7.18–24 w notatkach do wykładu (Iloczyny skalarne). Wykazać, że dla każdej macierzy $A \in SO(1, 3)$ albo A jest w obrazie, albo $-A$ jest w obrazie.
Wsk: Wykazać, że każdy element $SO^+(1, 3)$ można predstawić jako ABC, gdize $A, C \in SU(2)$, $B \in SO^+(1, 1)$.

Oktoniony

15.9. Definiujemy odwzorowanie $\star : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ wzorem

$$(a,b) \star (c,d) = (ac - d^* b \ , \ da + bc^*)$$



$$\text{for } h \in \mathbb{H} \quad h := (h,0) \qquad \ell := (0,1)$$

Niech $(a,b)^\# = (a^*, -b)$.
Udowodnić, że dla $v \in \mathbb{H}^2$ produkt $v \star v^\# \in \mathbb{H}^2$ jest postaci $(r,0)$, gdzie $r \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$.
Udowodnić, że dla każdego niezerowego elementu $v \in \mathbb{H}^2$ istnieje w taki, że $v \star w = w \star v = (1,0)$.

15.10. Niech

$$V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid A = A^*, \ tr(A) = 0\} = lin_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sprawdzić, że $\exp(iA) \in SU(2)$ dla $A \in V$. Zbadać obrazy prostych $\exp(itA)$ dla macierzy A takich jak powyżej.

16 tensory

16.1. ♠ Ćwiczenie: Jeśli wektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne, oraz $\sum v_i \otimes w_i = 0$ to $w_1 = w_2 = \cdots = w_k$.

16.2. Opisac rownaniami zbiór tensorow prostych w $\mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}^2$. Uogólnić rezultat do wyższych wymiarów.

16.3. Opisać jak wygląda macierz naturalnego przekształcenia $End(V) \times End(W) \to End(V \otimes W)$ w bazach pochodzących od wyboru baz w V i W.

16.4. Obliczyć $tr(f \otimes g)$ za pomocą $tr(f)$ i $tr(g)$.

16.5. Znaleźć współczynniki wielomianu charakterystycznego $f \otimes g$ w terminach współczynników wielomianów charakterystycznych dla f i g. Rozważyć przypadek $f \in End(\mathbb{K}^n)$, $g \in End(\mathbb{K}^m)$, $n, m \leq 3$.

16.6. Obliczyć wymiar potęgi symetrycznej $S^q(\mathbb{R}^n)$.

16.7. ♠ (Zanurzenie Veronese) Rozważyć przekształcenie

$$\mathbb{K}^n = V \to S^k(V) \quad v \mapsto \underbrace{v \otimes v \otimes \cdots \otimes v}_{k}.$$

Pokazać, że indukuje ono włożenie $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(S^k(V))$. Opisać równaniami obaz dla małych wrtości k i $\dim V$. Np $k = 2$, $\dim V = 2, 3$.

16.8. ♠ (Zanurzenie Plückera). Niech $Gras_k(\mathbb{K}^n)$ oznacza zbiór k-wymiarowych podprzestrzeni w $\mathbb{K}^n$. Wykazać, że przekształcenie $V = lin(v_1, v_2, \ldots, v_k) \mapsto lin(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) \in \mathbb{P}(\Lambda^k(\mathbb{K}^n))$ jest dobrze określone. Opisać wielomianami obraz. (Rozważyć przypadek $n = 4$, $k = 2$.)

16.9. ♠ Niech $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ będzie antysymetryczną formą 2-liniową na $V = \mathbb{K}^{2n}$. Wykazać, że ω jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n} \neq 0$.

16.10. Niech $v \in V$, $a \in \Lambda^q V$. Wykazać, że $v \wedge a = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = v \wedge b$ dla pewnego $b \in \Lambda^{q-1} V$

16.11. Pokazać, że Λ^q rozszerza się do funktora $\Lambda^q : Vect_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$.

16.12. Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarny. Iloczyn skalarny to jest pewien tensor $m : V \otimes V \to \mathbb{R}$, który można zamienić na izomorfizm $m^{\#} : V \to V^*$. Stąd otrzymujemy $\Lambda^q(m^{\#}) : \Lambda^q V \to \Lambda^q(V^*) = (\Lambda^q V)^*$. W ten sposób jest skonstruowana forma dwuliniowa w $\Lambda^q V$.
– Udowodnić, że jest to iloczyn skalarny.
– Mając bazę ortonormalną w V wslazać bazę ortonormalną w $\Lambda^q V$
– Udowodnić

$$||v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_q|| = vol(\langle v_1, v_2, \ldots, v_q \rangle)$$

– Niech $V = \mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Udowodnić

$$vol(\langle v_1, v_2, \ldots, v_q \rangle)^2 = \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\},\ |I|=q} m_I^2$$

gdzie m_I jest wyznacznikiem minora $q \times q$ macierzy rozmiaru $n \times q$ mającej wektory v_i jako kolumny.

16.13. Niech $f \in End(\mathbb{C}^3)$. Obliczyć wielomian charakterystyczny $W(\Lambda^2 f)$ za pomocą $W(f)$.

16.14. ♠ Niech V będzie przestrzenią zespoloną. Wskazać naturalny izomorfizm $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \simeq V \oplus \overline{V}$, gdzie $\overline{V}$ jako zbiór jest równy V, ale ma zmienione mnożenie przez skalary zespolone: $z \odot v := \overline{z} v$.

16.15. ♠ Który z poniższych tensorów (w klasycznej notacji) typu (0,1) jest prosty
a) $T^{i,j} = ij$,
b) $T^{i,j} = i + j$?

Zadania przygotowawcze do I kolokwium GAL II*

1 Endomorfizmy

1.1 Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem $\phi(x, y) = (x + 2y, x + y)$. Znaleźć wzór na $\phi^n(1, 0)$.

1.2 O przekształcenu $\phi : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$ wiemy:
– wielomian charakterystyczny jest równy $(x - 1)^3(x - 2)^4$,
– wymiar obrazu $(\phi - 2\,Id)^2$ jest większy od 3,
– wymiary przestrzeni własnych $\dim(V_1) = \dim(V_2) = 2$.
Jaką postać Jordana ma ϕ?

1.3 Niech $\phi : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ. Odpowiedź uzależnić od charakterystyki ciała.

1.4 Załóżmy, że $char(\mathbb{K}) \neq 3$. Niech $\phi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ.

1.5 Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Dany jest endomorfizm $\varphi : V \to V$. Udowodnić, że jeśli $\dim V \geq 3$ to V zawiera podprzestrzeń φ – niezmienniczą W taką, że $0 < \dim W < \dim V$.

1.6 Niech V będzie przestrzenią liniową (nad dowolnym ciałem), $\varphi \in End(V)$. Załóżmy, że W jest podprzestrzenią niezmienniczą. Niech
μ_V będzie wielomianem minimalnym φ,
μ_W będzie wielomianem minimalnym $\varphi_{|W} : W \to W$,
$\mu_{V/W}$ będzie wielomianem minimalnym przekształcenia indukowanego $\overline{\varphi} : V/W \to V/W$.
a) Udowodnić, że μ_V dzieli iloczyn $\mu_W \mu_{V/W}$.
b) Udowodnić, że jeśli μ_W i $\mu_{V/W}$ nie mają wspólnych czynników, to $\mu_V = \mu_W \mu_{V/W}$.
c) Podać przykład dla którego $\mu_V \neq \mu_W \mu_{V/W}$.

1.7 Dane jest przekształcenie $\phi : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$. Wiemy, że wartości własne ϕ to 1 i 2. Ponadto wiemy, że

$$1) \quad \dim(ker(\phi - Id)) = 2, \quad \dim(ker((\phi - Id)^2)) = 4,$$

$$2) \quad \dim(ker(\phi - 2Id)) = 1, \quad \dim(ker((\phi - 2Id)^2)) = 2.$$

Jakiej postaci Jordana może być macierz ϕ?

1.8 Załóżmy, że $\mathbb{K}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym. (Wersja łatwiejsza $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.) Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem spełniającym $\phi^k = Id$ dla pewnego k niepodzielnego przez $char(\mathbb{K})$. Udowodnić, że w pewnej bazie macierz ϕ jest diagonalizowalna.

1.9 Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$ oraz $B \in M_m(\mathbb{C})$. Pokazać, że jeśli $spec_{\mathbb{C}}(A) \cap spec_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$, to jedynym rozwiązaniem równania macierzowego $AX = XB$ jest macierz zerowa rozmiarów $n \times m$.

1.10 Niech $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Pokazać, że jeśli $AB + BA = 0$ oraz równanie $AX + XA = B$ ma rozwiązanie, dla pewnej macierzy $X \in M_n(\mathbb{C})$, to macierz B jest nilpotentna.

1.11 Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$ oraz $A \neq 0$. Określamy przekształcenie liniowe $T_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ wzorem

$$T_A(X) = AX - XA, \text{ dla } X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Pokazać, że:

(a) dla macierzy $B \neq 0$ mamy $AB = BA$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T_A T_B = T_B T_A$,

(b)* jeśli macierz A jest diagonalizowalna, to także endomorfizm T_A jest diagonalizowalny,

1.12 Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ taka, ze $A^3 = A + I$ oraz że dla każdej takiej macierzy, $\det A > 0$.

Wskazówka: rzeczywista wartość własna jest dodatnia, a nierzeczywiste wystąpią w tej samej krotności.

1.13 Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru. Dane przekształcenia liniowe $f, g : V \to V$ takie, że $fg = gf$. Ponadto V jest cykliczna ze wzgledu na f (to znaczy istnieje taki wektor $v \in V$, że zbiór $\{v, f(v), f^2(v), \dots\}$ rozpina przestrzeń V . Wykaż, że $g = W(f)$ dla pewnego wielomianu W.

2 Przestrzenie afiniczne

2.1 Niech $char(\mathbb{K}) = 0$. Dane proste afiniczne w $\mathbb{K}^3$:

$$P_1 = [0,0,0] + lin\{(1,1,1)\}, \quad P_2 = [4,2,0] + lin\{(0,0,1)\},$$

$$L_1 = [-1,0,0] + lin\{(0,0,1)\}, \quad L_2 = [1,0,0] + lin\{(0,1,0)\}$$

oraz punkty $q = (5,4,5)$ i $r_s = [s,0,0]$ (zależny od parametru $s \in \mathbb{K}$). Dla jakiego s istnieje izomorfizm afiniczny przekształcający P_i na L_i $(i = 1,2)$ oraz q na r_s?

2.2 Niech E będzie przestrzenią afiniczną, a F_1 i F_2 podprzestrzeniami. Załóżmy, że $TE = TF_1 + TF_2$. Udowodnić, że $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Wyrazić wymiar $F_1 \cap F_2$ za pomocą $\dim(F_1)$, $\dim(F_2)$ i $\dim(E)$.

2.3 Dane dwie podprzestrzenie afiniczne E i F wymiaru n w $\mathbb{K}^{2n+1}$. Załóżmy, że są one położone skośnie (tzn. $TE \cap TF = \{0\}$ i $E \cap F = \emptyset$). Ponadto dany punkt p nie należący do żadnej z tych podprzestrzeni.
a) Ile jest prostych afinicznych przechodzących przez p i przecinających E oraz F?
b) Czy każdą taką konfigurację (para przestrzeni i punkt) można przekształcić afinicznie na dowolną inną?

2.4 Niech $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ będzie przekształceniem afinicznym. Załóżmy, że dla każdej pary punktów $p, q \in \mathbb{K}^n$ takich, że $p \neq \phi(p)$ oraz $q \neq \phi(q)$ proste $L(p, \phi(p))$ oraz $L(q, \phi(q))$ są równoległe. Pokazać, że:

(a) jeśli $\phi \neq id$ oraz ϕ ma punkt stały, to wszystkie punkty stałe ϕ tworzą hiperpłaszczyznę w $\mathbb{K}^n$,

(b) jeśli ϕ nie ma punktów stałych to musi byc translacją tj. $T\phi = id$.

2.5 Dane jest przekształcenie afiniczne $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające:
$f([2,2,3]) = [3,0,4]$,
$f([1,2,4]) = [3,3,5]$,
$f([1,2,3]) = [0,2,2]$,
$f([1,3,3]) = [2,5,3]$.
Podać wzór analityczny. Znaleźć punkty, proste i płaszczyzny niezmiennicze.

Df ma dwie całkowite wartoći własne.

2.6 Niech E będzie przestrzenią afiniczną. Wykazać, że dwie pary rozłącznych podprzestrzeni afinicznych (H_1, H_2) i (H_1', H_2') są afinicznie równoważne (to znaczy istnieje izomorfizma afiniczny $E \to E$ dla którego $f(H_i) = H_i'$, $i = 1,2$) wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\dim H_1 = \dim H_1', \quad \dim H_2 = \dim H_2' \quad \text{oraz} \quad \dim af(H_1 \cup H_2) = \dim af(H_1' \cup H_2').$$

2.7 Niech $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem afinicznym bez punktów stałych danym wzorem $\phi(x) = Ax + a$, dla pewnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dla $v \neq 0$ rozważamy zbiór $H_v = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax + a = x + v\}$ (ma to sens, bo punkty przestrzeni afinicznej traktujemy jak wektory z $\mathbb{R}^n$). Pokazać, że H_v to podprzestrzeń afiniczna $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że $\phi(H_v) \subseteq H_v$ wtedy i tylko wtedy gdy $a = v + u$, gdzie $v \in \ker(g), u \in \mathrm{im}(g)$, oraz $g(x) = (A - I)x$.

3 Przestrzenie rzutowe

3.1 Odwzorowanie $\phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ dane jest wzorem:

$$\phi([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2].$$

Pokazać, że $\phi(\mathbb{P}^2) = V_{2,2}$, gdzie $V_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$ jest wspólnym zbiorem zer wielomianów:

$$x_0x_1 - x_3^2, z_0z_5 - z_4z_3, z_0z_2 - z_4^2, z_3z_5 - z_4z_1, z_3z_2 - z_4z_5, z_1z_2 - z_5^2.$$

3.2 Odwzorowanie $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$ dane jest wzorem:

$$\phi([x_0; x_1]) = [x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \ldots : x_1^d].$$

Pokazać, że krzywa $V_{1,d} = \phi(\mathbb{P}^1)$ nie jest zawarta w żadnej podprzestrzeni liniowej przestrzeni $\mathbb{P}^d$.

Uwaga. Odwzorowania występujące w dwóch powyższych zadaniach są szczegolnymi przypadkami tzw. odwzorowania Veronese. Powierzchnia $V_{2,2}$ i krzywe $V_{1,d}$ to szczególne przypadki tzw. rozmaitości Veronese.

3.3 Dane cztery proste w $\mathbb{K}^2$. Załóżmy, że żadne trzy z tych prostych nie przecinają się w jednym punkcie, oraz żadne trzy nie są równoległe. Udowodnić, że istnieje przekształcenie rzutowe przeprowadzające te proste na układ

$$L_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 : x_1 = 0\}, \quad L_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 : x_1 = 1\},$$
$$L_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 : x_2 = 0\}, \quad L_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 : x_2 = 1\}.$$

3.4 Dana kwadryka w $\mathbb{R}^2$ opisana równaniem: $3 + 8x - 8y + 2xy - 5y^2 = 0$? Znaleźć współrzędne rzutowe $(u, v) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$, w których kawdryka ma postać $u^2 + v^2 = 1$, lub uzasadnić, że nie istnieją takie współrzędne.

4 Formy dwuliniowe

4.1 Dane macierze:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 35 & -25 \\ -25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Które z tych macierzy są kongruentne nad $\mathbb{Q}$? (*Mówimy, że A i B są kongruentne nad $\mathbb{Q}$ jeśli istnieje macierz odwracalna C o współczynnikach wymiernych taka, że $A = C^TBC$.)*

4.2 Dane są macierze $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Nad którymi z następujących ciał powyższe macierze są kongruentne: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$?

4.3 Niech ϕ będzie dwuliniową formą na przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^4$ zadaną w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Czy istnieje baza, w której forma ϕ ma macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Jeśli tak, to znaleźć taką bazę. Odpowiedź uzależnić od własności ciała $\mathbb{K}$.

4.4 Niech (V, ξ) będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, $\dim V = 6$, z dwuliniową formą nieosobliwą, a $W \subset V$ jej trójwymiarową podprzestrzenią całkowicie zdegenerowaną. Czy wynika z tego, że $W = W^\perp$?

4.5 Czy poniższe dwie macierze symetryczne $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$ mogą być macierzami tej samej formy dwuliniowej ξ, tylko w różnych bazach przestrzeni $\mathbb{Z}_5^3$? Odpowiedź uzasadnić.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.6 Dana jest symetryczna forma kwadratowa w $\mathbb{R}^6$. Wyznaczniki kolejnych kwadratowych podmacierzy umieszczonych w lewym górnym rogu są następujące: $-\ +\ 0\ 0\ 0\ +$. Jakiego typu może być ta forma?

4.7 Czy istnieje macierz rzeczywista symetryczna 4×4, której znaki minorów są następujące?
a) $-\,,\,+\,,\,0\,,\,-$
b) $-\,,\,+\,,\,0\,,\,+$
Czy znamy sygnaturę tej macierzy?

4.8 Niech ϕ będzie niezdegenerowaną dwuliniową formą symetryczną na przestrzeni liniowej V. Załóżmy, że istnieje podprzestrzeń liniowa $W \subset V$ o własności $W = W^{\perp}$. Udowodnić, że wtedy V jest parzystego wymiaru i w pewnej bazie ϕ ma macierz o postaci klatkowej $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, gdzie I jest macierzą jednostkową rozmiaru $\frac{\dim(V)}{2}$.

4.9 Niech A będzie symetryczną niezdegenerowaną macierzą kwadratową o wyrazach wymiernych. Udowodnić, że macierze

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

są kongruentne nad $\mathbb{Q}$. (Powyżej macierz I oznacza macierz jednowtkową rozmiaru A.)

5 Proste pytania, odpowiedzi na które należy krótko uzasadnić

A. Dana jest skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa V nad ciaem $\mathbb{C}$ i endomorfizm $\varphi : V \to V$. Wiadomo, że φ ma tylko dwie wartości własne 0 i 1,

$$\dim(ker(\varphi^2)) < \dim(ker(\varphi^3)) = \dim(ker(\varphi^4))$$

oraz

$$\dim(ker(\varphi - Id)) < \dim(ker((\varphi - Id)^2)) = \dim(ker((\varphi - Id)^3)).$$

Jaki jest wielomian minimalny φ?

B. Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem spełniającym $\varphi^3 = Id$, $\varphi \neq Id$. Jaki jest wielomian charakterystyczny φ?

C. Znaleźć część półprostą z rozkładu Jordana-Chevalleya endomorfizmu $\varphi \in End(\mathbb{C}^7)$,

$$\varphi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7) = (z_7, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6).$$

D. Dana jest prosta afiniczna $L \subset \mathbb{Z}_3^4$. Ile jest płaszczyzn afinicznych w $\mathbb{Z}_3^4$ niezawierających L?

E. Czy złożenie dwóch rzutowań w przestrzeni afinicznej może nie mieć punktu stałego?

GAL* – zadania przygotowawcze do kolokwium II

---

1. Dana jest kwadryka Q opisana równaniem

$$7{x_1}^2 + 48x_1x_3 + 70x_1 - {x_2}^2 + 4x_2 - 7{x_3}^2 - 10x_3 + 21 = 0$$

a) Czy istnieją współrzędne afiniczne, w których Q jest opisana równaniem

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1\ ?$$

Jeśli isnieją, to znaleźć te współrzędne.
b) Czy istnieje rzutowa zamiana współrzędnych taka, że Q w nowych współrzędnych jest opisana równaniem $z_1^2 - z_2^2 - 2z_3 = 0$? Jeśli isnieje, to znaleźć tę zamianę zmiennych.
c) Znaleźć środek symetrii (jeśli istnieje) oraz kierunki i długości osi głównych kwadryki.

---

2. Dany operator $A \in End(\mathbb{R}^3)$ jest zadany macierzą

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} & \frac{8}{9} \\ 2 & \frac{11}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Przedstawić A jako złożenie QP operatora izometrii Q i samosprężonego nieujemnie określonego P.

---

3. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Niech G będzie skończoną podgrupą $GL(V)$.
a) Udowodnić, że istnieje iloczyn skalarny w V taki, że dla każdego $g \in G$ mamy $(v, w) = (g(v), g(w))$.
b) Wykazać, że dla każdej G-niezmienniczej podprzestrzeni $W \subset V$ istnieje jej G-niezmiennicze dopełnienie do sumy prostej.

---

4. Opisać wszystkie przekształcenia $\mathbb{R}$-liniowe z liczb zespolonych do kwaternionów, które zachowują działania dodawania i mnożenia.

---

5. Dane przekształcenie afiniczne $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Wiemy, że $D\phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ oraz $\phi(0,0,0) = (1,2,3)$. Co to za przekształcenie?

---

6. *Potęgi zewnętrzne $\Lambda^k V$ będą omówione na najbliższym wykładzie.*
a) Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi. Skonstruować naturalny izomorfizm

$$\Lambda^k(V \oplus W) = \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^i V \otimes \Lambda^j W.$$

b) Niech $\dim V = n$. Wskazać naturalny izomorfizm

$$\Lambda^k V \to \Lambda^{n-k} V^* \otimes \Lambda^n V$$

IMIĘ i NAZWISKO GRUPA

Zadanie 5 (6 x 20pt)

1. Proszę opisać wszystkie izometrie przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$, które mają dokładnie jeden punkt stały.

2. Proszę opisać wszystkie symetryczne, ortogonalne i dodatnio określone macierze o współczynnikach rzeczywistych.

3. Wykazać, że jeśli endomorfizm samosprzężony przestrzeni $\mathbb{C}^n$ jest nilpotentny, to jest zerowy.

4. Podać dowód, że jeśli endomorfizm przestrzeni unitarnej jest idempotentny (tzn $A^2 = A$) i normalny (tzn $AA^* = A^*A$) to jest samosprzężony.

5. Ile jest elementów z $SU(2)$, które są przemienne ze wszystkimi innymi elementami $SU(2)$?

6. Czy każda podprzestrzeń liniowa przestrzeni $V \otimes W$ jest postaci $V_1 \otimes W_1$, gdzie V_1 to podprzestrzeń V, a W_1 to podprzestrzeń W? Odpowiedź uzasadnić.

DRUGIE KOLOKWIUM Z GALU z ★

Zadanie 1. (60pt)

W $\mathbb{R}^3$ jest zadana kwadryka równaniem:

$$x^2 + 5y^2 - 8xz + 8yz + 3z^2 + 10y + 8z = 1$$

(a) Znaleźć środek symetrii kwadryki.

(b) Znaleźć kierunki osi głównych kwadryki.

(c) Jaka jest postać kanoniczna formy ze względu na izometrie?

Wskazówka: macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

ma wielomian charakterystyczny równy $-t^3 + 9t^2 + 9t - 81$. *Wielomian ten ma całkowite pierwiastki.*

Zadanie 2. (50pt)

Definiujemy odwzorowanie $\star : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ wzorem

$$(a, b) \star (c, d) = (ac - d^* b\ ,\ da + bc^*).$$

Niech $(a, b)^\# = (a^*, -b)$.
Udowodnić, że dla $v \in \mathbb{H}^2$ produkt $v \star v^\# \in \mathbb{H}^2$ jest postaci $(r, 0)$, gdzie $r \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$.
Udowodnić, że dla każdego niezerowego elementu $v \in \mathbb{H}^2$ istnieje w taki, że $v \star w = w \star v = (1, 0)$.

Zadanie 3. (60pt)

Niech $f : V \to V'$ i $g : W \to W'$ będą przekształceniami liniowymi.

a) Udowodnić, że

$$ker(f \otimes g) = ker(f) \otimes W + V \otimes ker(g)\,.$$

b) Czy istnieje tensor prosty $v \otimes w \in ker(f \otimes g)$ taki, że $v \notin ker(f)$ i $w \notin ker(g)$?

Zadanie 4. Teoretyczne. (60pt)

Sformułować i udowodnić nierówność Schwarza w przestrzeni unitarnej.

IMIĘ i NAZWISKO GRUPA

Zadanie 5 (6 x 20pt)

1. Dana liniowa przestrzeń V nad $\mathbb{R}$ wymiaru 7 i jej endomorfizm f. Wiadomo, że wielomian charakterystyczny ma dokładnie trzy pierwiastki rzeczywiste. Rzeczywiste pierwiastki są jednokrotne. Czy można wnioskować, że istnieje wektor $v \in V$ taki, że ciąg $v,\ f(v),\ f^2(v),\ f^3(v), \ldots$ rozpina przestrzeń V.

2. Dana jest płaszczyzna afiniczna $V \subset \mathbb{R}^4$ oraz punkt p leżący poza płaszczyzną. Niech A będzie zbiorem punktów $q \in \mathbb{R}^4 \setminus \{p\}$ takich, że prosta przechodząca przez p i q przecina płaszczyznę V. Czy $A = \mathbb{R}^4 \setminus \{p\}$? Jeśli nie, to opisać ten zbiór przyjmując dogodny układ współrzędnych.

3. Dana jest macierz $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Czy istnieje macierz D o współczynnikach rzeczywistych, taka że $D^T A D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$? Czy można dobrać D tak by miała współczynniki wymierne?

4. Macierz $M \in M_n(\mathbb{C})$ jest normalna (tzn $MM^* = M^*M$), wartości bezwzględne jej wartości własnych są różne oraz macierz M^*M ma współczynniki rzeczywiste. Czy wynika stąd, że M jest samosprzężona?

5. Zastosować ortogonalizację Grama-Schmidta do wektorów $\alpha_1 = (3, 4, 0), \alpha_2 = (6, 8, 1), \alpha_3 = (0, 1, 1)$ w $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

6. Niech S^2V będzie przestrzenią ilorazową $(V \otimes V)/I$ gdzie podprzestrzeń I jest rozpieta przez wektory postaci $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$. Wyznacz wymiar przestrzeni S^2V wiedząc, że $\dim(V) = n$.

Zadanie 1

Dana jest skończenie wymiarowa przestrzeń V nad $\mathbb{R}$ oraz endomorfizm T przestrzeni V spełniający rowności: $T^4 - 1 = T^3 + 3T^2 + T + 3 = 0$. Pokazać, że V można przedstawić jako sumę prostą dwuwymiarowych przestrzeni T-niezmienniczych.

Zadanie 2.

Ile różnych prostych w $\mathbb{P}^3$ przecina jednocześnie cztery poniższe proste w $\mathbb{P}^3$ opisane we współrzędnych jednorodnych równaniami:

$$\begin{aligned}
&L_1 : x = y = 0,\\
&L_2 : z = w = 0,\\
&L_3 : x = y, \quad z = w,\\
&L_4 : x + 2y = z + w, \quad x + 2w = y + z.
\end{aligned}$$

Zadanie 3.

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Pokazać, że macierze $A^T A$ oraz AA^T są podobne.

Czy powyższe stwierdzenie jest prawdziwe dla macierzy zespolonych?

Zadanie 4

Niech φ będzie przekształceniem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej.

a) Przypuśćmy że $(\varphi(\alpha), \alpha) \geq 0$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pokazać, że jeżeli dla pewnego wektora α_0, $(\varphi(\alpha_0), \alpha_0) = 0$, to $\varphi(\alpha_0) = 0$;

b) Załóżmy, że $\frac{(\varphi(\alpha),\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ przymuje wartość maksymalną dla wektora α_{max} oraz wartość minimalną dla wektora wektora α_{min}. Udowodnić, że jeśli $\alpha_{min} \neq \alpha_{max}$, to $\alpha_{min} \perp \alpha_{max}$.

PYTANIA NA EGZAMIN USTNY 2018

♣ **5** Przestrzenie ilorazowe i własność uniwersalna ilorazu

♣ **6** Wartości własne, przestrzenie własne i przestrzenie pierwiastkowe

♣ **7** Sprowadzanie macierzy endomorfizmu do postaci górnotrójkątnej

♣ **8** Wielomian charakterystyczny i tw. Cayleya–Hamiltona

♣ **9** Rozkład przestrzeni na sumę prostą podprzestrzeni pierwiastkowych

♣ **10** Przestrzenie cykliczne i nilpotentne (ze względu na dany endomorfizm)

♣ **W** Twierdzenie Jordana - dowód za pomocą maksymalnych podprzestrzeni cyklicznych

♣ **D** Jednoznaczności w rozkładzie Jordana, wymiary klatek, część nilpotentna i półprosta endomorfizmu

♣ **K** Przestrzenie rzutowe i przekształcenia rzutowe

♣ **A** Przestrzenie i przekształcenia afiniczne, bazy punktowe i współrzędne barycentryczne

♢ **5** Grupa automorfizmów afinicznych i niezmienniki przekształceń afinicznych

♢ **6** Formy 2-liniowe, warunek niezdegenerowania

♢ **7** Formy (anty)symetryczne, rozkład na sumę formy całkowicie zdegenerowanej i niezdegenerowanej

♢ **8** Sprowadzenie niezdegenerowanej formy antysymetrycznej do postaci Darboux

♢ **9** Diagonalizacja form symetrycznych

♢ **10** Twierdzenie o bezwładności dla rzeczywistych form kwadratowych

♢ **W** Metoda Jacobiego diagonalizacji formy, metoda Lagrange'a

♢ **D** Kryterium Sylwestera

♢ **K** Ortogonalizacja Grama-Schidta i rozkład Iwasawy KAN

♢ **A** Iloczyn skalarny, nierówność Schwarza, miara kąta

♠ **5** Wyznacznik Grama i objętość równoległoboku

♠ **6** Iloczyn wektorowy

♠ **7** Operatory sprzężone, samosprężone, unitarne. Postać ich macierzy

♠ **8** Diagonalizowalność operatorów samosprzężonych (twierdzenie spektralne)

♠ **9** Diagonalizowalność operatorów unitarnych i blokowa diagonalizowalność operatorów ortogonalnych nad $\mathbb{R}$

♠ **10** Rozkład polarny (biegunowy) operatora

♠ **W** Postać kanoniczna izometrii afinicznej $\mathbb{R}^n$ ze szczególnym uwzględnieniem $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

♠ **D** Kwadryki: równoważność afiniczna i rzutowa, postacie kanoniczne

♠ **K** Postać kanoniczna kwadryki w przestrzeni euklidesowej, osie główne

♠ **A** Formy półtoraliniowe i iloczyn hermitowski, własności części rzeczywistej i urojonej (forma symplektyczna)

♡ **5** Relacja pomiędzy grupami $U(n)$, $Sp_n(\mathbb{R})$, $O(2n)$, $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_{2n}(\mathbb{R})$.

♡ **6** Kwaterniony i odwzorowanie $SU(2) \to SO(3)$

♡ **7** Grupy $O(1,1)$ i $O(1,3)$.

♡ **8** Działanie $SL_2(\mathbb{C})$ na czasoprzestrzeni. Odwzorowanie $SL_2(\mathbb{C}) \to SO^+(1,3)$

♡ **9** Przestrzeń Łobaczewskiego i dziaąnie na niej $SL_2(\mathbb{C})$ lub $SO^+(1,3)$

♡ **10** Iloczyn tensorowy przestrzeni wektorowych: konstrukcja i własność uniwersalna

♡ **W** Klasyczne tensory, reguły zamiany bazy

♡ **D** Urzeczywistnienie i kompleksyfikacja, struktura zespolona w przestrzeni rzeczywistej

♡ **K** Algebra tensorowa, kontrakcje. Uniwersalna własność $T(V)$

♡ **A** Potęgi symetryczne i zewnętrzne, uniwersalne własności