1 Ciągi spektralne

Przykładowe źródło: C. Weibel - An Introduction to Homological Algebra, roz. 5

1.1 Homologiczny ciąg spektralny, to rodzina modułów (lub innych obiektów kategorii abelowej) E^r_{pq} wraz z różniczkami

$$d^r_{p,q}: E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}, \qquad E^{r+1}_{p,q} = ker(d^r_{p,q})/im(d^r_{p+r,q-r+1})$$

Napis $E^r_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$ oznacza, że w H_* jest filtracja malejąca taka, że

$$F_pH_{p+q}/F_{p-1}H_{p+q} \simeq E^\infty_{p,q}\,.$$

1.2 Homologiczny ciąg spektralny związany z filtracją kompleksu łańcuchowego. Definiujemy

$$A^r_{p,\bullet} = \{x \in F_pC_\bullet \mid d(x) \in F_{p-r}C_\bullet\},$$

$$Z^r_{p,\bullet} = \text{obraz } A^r_{p,\bullet} \text{ w } F_pC_\bullet/F_{p-1}C_\bullet,$$

$$B^r_{p,\bullet} = \text{obraz } d(A^{r-1}_{p+r-1,\bullet}) \text{ w } F_pC_\bullet/F_{p-1}C_\bullet,$$

$$E^r_{p,\bullet} = \frac{Z^r_{p,\bullet}}{B^r_{p,\bullet}} = \frac{A^r_{p,\bullet} + F_{p-1}C_\bullet}{d(A^{r-1}_{p+r-1,\bullet}) + F_{p-1}C_\bullet} = \frac{A^r_{p,\bullet}}{d(A^{r-1}_{p+r-1,\bullet}) + A^{r-1}_{p-1,\bullet}}\,.$$

Gradacja na współrzędnej q jest tak dobrana, że

$$B^r_{p,q} \subset Z^r_{p,q} \subset F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q}\,.$$

Różniczka w $C_\bullet$ indukuje różniczkę $E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ (Ćw). Jest spełniony warunek $H_*(E^r_{*,*}) = E^{r+1}_{*,*}$ (Ćw). Zatem $E^r_{p,q}$ jest podilorazem (ilorazem podobiektu) F_pC_{p+q}.

1.3 Ciąg spektralny przestrzeni topologicznej z filtracją

$$E^0_{p,q} = C_{p+q}(X_p, X_{p-1}), \qquad E^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(X)\,.$$

Różniczka

$$E^1_{p,q} \to E^1_{p-1,q}$$

czyli

$$H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \to H_{p-1+q}(X_{p-1}, X_{p-2})$$

jest różniczką z długiego ciągu dokładnego homologii trójki

$$(X_p, X_{p-1}, X_{p-2})\,.$$

1.4 Kohomologiczny ciąg spetralny, struktura multiplikatywna

$$d^{p,q}_r: E^{p,q}_r \to E^{p+r,q-r+1}_r, \qquad E^{r+1}_{p,q} = ker(d^r_{p,q})/im(d^r_{p-r,q+r-1})$$

$$E^{p,q}_r \times E^{p',q'}_r \to E^{p+p',q+q'}_r\,.$$

1.5 Ciąg spektralny Serre'a rozwłóknienia $F \to X \to B$ pochodzi od filtracji bazy szkieletami rozkładu komórkowego

$$B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_p \subset \ldots\,.$$

Bierzemy przeciwobraz tej filtracji w X

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_p \subset \ldots\,.$$

Mamy

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \simeq C_p(B; H_q(F)) \qquad \text{(łańcuchy komórkowe).}$$

Sprawdzamy, że różniczka w tablicy $E^1_{\bullet\bullet}$ jest równa różniczce w kompleksie liczącym kohomologie B, zatem

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F)) \Rightarrow H_{p+q}(X)\,.$$

Dualny ciąg kohomologiczny:

$$E^{p,q}_2 = H^p(B; H^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(X)$$

1.6 szczególne przypadki: ciąg Wanga, ciąg Gysina

1.7 Przykład: obliczenie kohomologii ΩS^n
Odp: jako grupa abelowa: $\mathbb{Z}$ w gradacjach podzielnych przez $n-1$. Mnożenie: $a_k a_\ell = \binom{k+\ell}{k} a_{k+\ell}$

2 Ciągi spektralne a teoria Hodge'a

2.1 Ciąg spektralny Frölichera dla rozmaitości zespolonej

$$E_1^{p,q} = H^q(M;\Omega^p_M) \Rightarrow H^{p+q}(X;\mathbb{C})$$

związany z filtracją Hodge'a w $\mathcal{A}^\bullet_{\mathbb{C}}(M)$. (Dla ciągów spektralnych kohomologicznych rozważamy filtracje malejące.)
– gdy M Kählera, to $E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q}$
– gdy M jest afiniczna to $E_1^{p,q} = 0$ dla $q > 0$, więc $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$, zatem $H^*(M;\mathbb{C}) = H^*(\Omega^\bullet(M))$.

2.2 Degeneracja ciągu spektralnego rozwłóknienia $F \subset X \twoheadrightarrow B$, którego włókna są kählerowskie, a forma Kählera rozszerza się do X, ponadto zakładamy, że systemy współczynników $H^q(F)$ na B są trywialne. Wniosek: $H^*(X) \simeq H^*(B) \otimes H^*(F)$ addytywnie (!!).

2.3 Ciąg spektralny Deligne'a obliczjący kohomologie dopełnienia dywizora z normalnymi przecięciami $X = M \setminus D$, $D = \bigcup_{i\in I} D_i$. Twierdzenie: ciąg degeneruje się na E_2
– Filtracja wagowa kompleksu $\mathcal{A}^\bullet(M, \log\langle D\rangle)$

$$E_1^{-pq} = H^{q-2p}(X^p)\,.$$

- Dla multindeksu $I = \{i_1, i_2, \dots, i_\ell\}$ mamy $X_I = D_{i_1} \cap D_{i_2} \cap \dots \cap D_{i_\ell}$ i $X^\ell = \coprod_{|I|=\ell} X_I$ (przyjmujemy $X^0 = M$). Dla $\ell = 0, 1, \dots m$ mamy reziduum

$$\frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \frac{dz_{i_2}}{z_{i_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{i_\ell}}{z_{i_j}} \wedge \omega \longmapsto \omega_{|X_I}\,,$$

które indukuje izomorfizm na kohomologiach

$$res_\ell : H^k\big(W_\ell\mathcal{A}^\bullet(M,\log\langle D\rangle)/W_{\ell-1}\mathcal{A}^\bullet(M,\log\langle D\rangle)\big) \to H^{k-\ell}(\mathcal{A}^\bullet(X^\ell))$$

(Patrz Zadanie 10 lub Shabat, *Introduction to complex analysis* §18 roz. 54, Thm. 1)
– Tablica E_1:

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
0 & \to & H^0(X^2) & \to & H^2(X^1) & \to & H^4(X^0) & \to & 0 & 4\\
 & & 0 & \to & H^1(X^1) & \to & H^3(X^0) & \to & 0 & 3\\
 & & 0 & \to & H^0(X^1) & \to & H^2(X^0) & \to & 0 & 2\\
 & & & & 0 & \to & H^1(X^0) & \to & 0 & 1\\
 & & & & 0 & \to & H^0(X^0) & \to & 0 & 0\\
\hline
-3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 &
\end{array}$$

– Różniczka d_1 jest alternującą sumą odwzorowań Gysina

$$H^*(X^I) \to H^{*+2}(X^{I\setminus\{i\}}).$$

Aby brać pod uwagę strukturę Hodge'a piszemy $V(k)$ dla oznaczenia twistu Tate'a (przesunięcie indeksów: $V(k)^{p,q} := V^{p-k,q-k}$):

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
0 & \to & H^0(X^2)(-2) & \to & H^2(X^1)(-1) & \to & H^4(X^0) & \to & 0 & 4\\
 & & 0 & \to & H^1(X^1)(-1) & \to & H^3(X^0) & \to & 0 & 3\\
 & & 0 & \to & H^0(X^1)(-1) & \to & H^2(X^0) & \to & 0 & 2\\
 & & & & 0 & \to & H^1(X^0) & \to & 0 & 1\\
 & & & & 0 & \to & H^0(X^0) & \to & 0 & 0\\
\hline
-3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 &
\end{array}$$

– Ciąg Deligne'a degeneruje się: $E_\infty = E_2$, bo różniczka w ciągu spektralnym zachowuję strukturę Hodge'a. Dostajemy:

$$Gr^W_\ell H^n(X) = H^{n-\ell}\Big(\dots \to \underbrace{H^{n-4}(X^2)(-2)}_{-2} \to \underbrace{H^{n-2}(X^1)(-1)}_{-1} \to \underbrace{H^n(X^0)}_{0} \to 0\Big)\,.$$

2.4 Moje notatki o mieszanych strukturach Hodge'a http://www.mimuw.edu.pl/∼aweber/ps/mhs.pdf

2.5 P. Griffiths, W. Schmid Recent developments in Hodge theory, o mieszanych strukturach Hodge'a.

2.6 Abstrakcyjna definicja mieszanej struktury Hodge'a jest w §książki Marka A. de Cataldo: Lectures on the Hodge theory of projective manifolds http://arxiv.org/abs/math/0504561