Zadania pisemne na 27 października

W poniższych zadaniach $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych, $\langle a, b\rangle$ oznacza parę uporządkowaną.

Zadanie 1.
Dla $q \in \mathbb{R}$ definiujemy rodzinę zbiorów

$$\mathcal{A}_q = \Big\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \ : \ \exists r \in \mathbb{R} \quad A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x + y > r) \vee (y < q)\}\Big\}.$$

Niech

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{A}_q \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)) \ : \ q \in \mathbb{R} \ \wedge \ q > 0\}\,.$$

Opisać możliwie jak najprościej zbiory

$$\bigcup \mathcal{A}_q, \qquad \bigcap \mathcal{A}_q,$$

dla każdego $q \in \mathbb{R}$ oraz

$$\bigcup \mathcal{B}, \qquad \bigcap \mathcal{B}, \qquad X = \bigcup\bigcap \mathcal{B}\,, \qquad Y = \bigcap\bigcup \mathcal{B}\,.$$

Czy $X = Y$?

Zadanie 2.
Narysować na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ zbiory

$$\bigcup_{k\in\{2,-1,0,1,2\}} \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x - k| + |y| \leqslant 1\}\,,$$

$$\bigcap_{\ell\in\{-1,0,1\}} \ \bigcup_{k\in\{2,-1,0,1,2\}} \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x - k| + |y - \ell| \leqslant 1\}\,,$$

Czy te zbiory są postaci $A \times B$ dla $A, B \subset \mathbb{R}$?

Zadanie 3.
Przypomnienie: X^Y oznacza zbiór funkcji z Y to X.
Dla dowolnych zbiorów A, B, C wskazać bijekcję pomiędzy $(A \times B)^C$ a $A^C \times B^C$. Czy prawdą jest, że $(A \times B)^C = A^C \times B^C$?