Zadania na ćwiczenia 27 października → 3 listopada

Zadanie 1.
Dla $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiujemy podzbiór zbioru liczb rzecywistych
$$A_{\varepsilon,m} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - \tfrac{1}{m}| < \varepsilon\}\,.$$
Opisać zbiory
$$\bigcap_{\varepsilon>0} \ \bigcup_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} A_{\varepsilon,m}\,, \qquad \bigcup_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \ \bigcap_{\varepsilon>0} A_{\varepsilon,m}\,,$$
$$\bigcap_{\varepsilon>0} \ \bigcap_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} A_{\varepsilon,m}\,, \qquad \bigcap_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \ \bigcap_{\varepsilon>0} A_{\varepsilon,m}\,,$$
$$\bigcap_{\varepsilon>0} \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \ \bigcap_{m\geqslant n} A_{\varepsilon,m}\,.$$

Wskazówka: Powyższe zadanie jest blisko związane z definicją granicy ciągu:
$$a_n \textit{ zbiega } g \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \ |g - a_n| < \varepsilon\,.$$

Zadanie 2.
Przypomnienie: $X^Y \subset \mathcal{P}(Y \times X)$ *oznacza zbiór funkcji z* Y *to* X*.*
Niech A, B, C będą zbiorami.

1) Czy prawdą jest, że $A^{B\cup C} = A^B \times A^C$?

2) Załóżmy, że $B \cap C = \emptyset$. Czy prawdą jest, że $A^{B\cup C} = A^B \times A^C$?

3) Załóżmy, że $B \cap C = \emptyset$. Wskazać bijekcję $A^{B\cup C} \to A^B \times A^C$?

4) Nie zakładamy, że $B \cap C = \emptyset$. Skonstruować zbiór D oraz bijekcję $A^D \to A^B \times A^C$.

Wskazówka: Zadanie dotyczy bardzo dobrze znanej własności funkcji: Jeśli chcemy zdefiniować funkcję f *na zbiorze* X*, który jest sumą rozłącznych zbiorów* A *i* B*, to wystarczy określić funkcję na* A *i* B *niezależnie.*

Zadanie 3.
Niech A, B, C będą zbiorami. Wskazać bijekcję
$$(A^B)^C \to (A^C)^B\,.$$

Wskazówka: Jeszcze jest trzeci zbiór, który jest w bijekcji z powyższymi. Jest to zbiór funkcji z $B \times C$ *do* A*. Pytanie: jak z funkcji dwóch zmiennych* $f(x, y)$ *zrobić funkcję zmiennej* y*, mając ustalony* x*?*