$n \preceq m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(p(n) < p(m) \vee (p(n) = p(m) \wedge n \leq m))$.

(b) Niech $c(n)$ oznacza sumę cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby n.

$n \preceq m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(c(n) < c(m) \vee (c(n) = c(m) \wedge n \leq m))$.

12.3. W każdym z poniższych przykładów udowodnij, że relacja $\preceq$ dobrze porządkuje zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Rozstrzygnij, czy zbiory dobrze uporządkowane $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq \rangle$ i $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ są izomorficzne. Jeśli nie — wskaż elementy graniczne zbioru $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ w sensie porządku $\preceq$.

(a) $\langle n_1, m_1 \rangle \preceq \langle n_2, m_2 \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\max(n_1, m_1) < \max(n_2, m_2)$
$$\vee (\max(n_1, m_1) = \max(n_2, m_2) \wedge \langle n_1, m_1 \rangle \leq_{\text{leks}} \langle n_2, m_2 \rangle)).$$

(b) $\langle n_1, m_1 \rangle \preceq \langle n_2, m_2 \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\min(n_1, m_1) < \min(n_2, m_2)$
$$\vee (\min(n_1, m_1) = \min(n_2, m_2) \wedge \langle n_1, m_1 \rangle \leq_{\text{leks}} \langle n_2, m_2 \rangle)).$$

(c) $\langle n_1, m_1 \rangle \preceq \langle n_2, m_2 \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(n_1 + m_1 < n_2 + m_2)$
$$\vee (n_1 + m_1 = n_2 + m_2 \wedge \langle n_1, m_1 \rangle \leq_{\text{leks}} \langle n_2, m_2 \rangle)).$$

(d) $\langle n_1, m_1 \rangle \preceq \langle n_2, m_2 \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(|n_1 - m_1| < |n_2 - m_2|)$
$$\vee (|n_1 - m_1| = |n_2 - m_2| \wedge \langle n_1, m_1 \rangle \leq_{\text{leks}} \langle n_2, m_2 \rangle)).$$

12.4. Niech $\langle X, \leq_X \rangle$ oraz $\langle Y, \leq_Y \rangle$ będą zbiorami dobrze uporządkowanymi. Dla danej funkcji $f : X \to Y$ definiujemy relację $\preceq$ w zbiorze X w następujący sposób:
$$x_1 \preceq x_2 \Leftrightarrow (f(x_1) <_Y f(x_2) \vee (f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \leq_X x_2)).$$
Udowodnij, że relacja $\preceq$ dobrze porządkuje zbiór X.

12.5. Niech $\langle \langle X_i, \leq_i \rangle : i \in I \rangle$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów dobrze uporządkowanych o zbiorze indeksów I, dobrze uporządkowanym przez relację $\leq_I$. Załóżmy ponadto, że jeśli $i, j \in I$ oraz $i \neq j$, to $X_i \cap X_j = \emptyset$. Niech $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ oraz niech $f : X \to I$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem
$$f(x) = i \qquad \text{dla } x \in X_i.$$
W zbiorze X definiujemy relację $\preceq$ w następujący sposób:
$$x_1 \preceq x_2 \Leftrightarrow (f(x_1) <_I f(x_2) \vee \exists i \in I \; (f(x_1) = f(x_2) = i \wedge x_1 \leq_i x_2)).$$
Udowodnij, że relacja $\preceq$ dobrze porządkuje zbiór X.

12.6. W zbiorze Fin wszystkich skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych określamy relację $\preceq$ w następujący sposób:
$$X \preceq Y \Leftrightarrow (X = Y \vee (X \neq Y \wedge \max(X \triangle Y) \in Y)).$$

(a) Udowodnij, że relacja $\preceq$ dobrze porządkuje zbiór Fin.

(b) Rozstrzygnij, czy zbiory dobrze uporządkowane $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle \text{Fin}, \preceq \rangle$ są izomorficzne.

12.7. Udowodnij, że żaden nieprzeliczalny podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ nie jest dobrze uporządkowany przez zwykłą relację $\leq$ w $\mathbb{R}$.

12.8. Udowodnij, że zbiór wszystkich relacji dobrze porządkujących zbiór $\mathbb{N}$ ma moc continuum.

WYKŁAD 13 LEMAT KURATOWSKIEGO–ZORNA

13.1. Niech X będzie niepustym zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$. Udowodnij, że jeśli każdy łańcuch w X ma ograniczenie górne w zbiorze X, to dla każdego elementu $y \in X$ w zbiorze X istnieje taki element maksymalny M, że $y \preceq M$.

13.2. Niech X będzie niepustym zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$. Udowodnij, że jeśli każdy każdy łańcuch w X ma ograniczenie dolne w zbiorze X, to dla każdego elementu $y \in X$ w zbiorze X istnieje taki element minimalny m, że $m \preceq y$.

13.3. (a) Udowodnij, że istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

(1) każde dwie różne pary punktów zbioru A realizują różne odległości, ściślej:
$$\forall a, b, c, d \in A \; ((a \neq b \wedge c \neq d \wedge \{a, b\} \neq \{c, d\}) \Rightarrow |a - b| \neq |c - d|),$$

(2) dla każdego punktu $x \in \mathbb{R} \setminus A$ w zbiorze $A \cup \{x\}$ istnieją dwie różne pary punktów realizujące te same odległości, ściślej:
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus A \; \exists a, b, c, d \in A \cup \{x\} \; (a \neq b \wedge c \neq d \wedge \{a, b\} \neq \{c, d\} \wedge |a - b| = |c - d|).$$

(b) Udowodnij, że każdy zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ o własnościach z punktu (a) jest nieprzeliczalny.

13.4. (a) Udowodnij, że istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^2$ o następujących własnościach:

(1) żadne trzy różne punkty zbioru A nie leżą na jednej prostej,

(2) każdy punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ należy do pewnej prostej przechodzącej przez dwa różne punktu zbioru A.