Zadania pisemne na 24 listopada

Zadanie 1.

Niech $\mathbb{C}$ oznacza zbiór liczb zespolonych. Dla $z \in \mathbb{C}$ część rzeczywista jest oznaczana przez $Re(z)$. Jeśli $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to $Re(z) = a$. Definiujemy funkcję $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{z - i}\,.$$

Niech $A = \{z \in \mathbb{C} \;:\; Re(z) = 1\}$. Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory $f[A]$ i $f^{-1}[A]$.

Wskazówka: Przy szukaniu obrazu A może być użyteczna funkcja odwrotną do f, której dziedzina jest równa $f[\mathbb{C} \setminus \{i\}]$.

Zadanie 2.

Dla danych dwóch zbiorów X i Y i funkcji $f : X \to Y$ zdefiniujemy funkcję $\varphi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ wzorem

$$\varphi(A) = f^{-1}[A] \quad \text{dla } A \subset Y\,.$$

Czy jest prawdziwe następujące zdanie?

Funkcja φ jest „na” wtedy i tylko wtedy gdy, funkcja f jest różnowartościowa.

Uwaga: Porównaj zadanie 3.15 ze zbiorku.

Zadanie 3.

Niech X i Y będą zbiorami oraz niech $f : X \to Y$ będzie funkcją. Udowodnić, że f jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony następujący warunek:

Dla każdego zbioru Z oraz dwóch funkcji $g_1 : Y \to Z$ i $g_2 : Y \to Z$
jeśli $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, to $g_1 = g_2$.

Ten warunek można wyrazić formułą

$$\forall Z \; \forall g_1, g_2 \in Z^Y \; (g_1 \circ f = g_2 \circ f) \;\Rightarrow\; (g_1 = g_2)\,.$$

Uwaga: powyższy warunek można wysłowić następująco: funkcja $F : Z^Y \to Z^X$, $F(g) := g \circ f$ jest różnowartościowa.