

Zadania pisemne do oddania 18 stycznia 2023

ZADANIE 1.

Niech $A = \{\star, \heartsuit, \spadesuit\}$, $B = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ oraz niech $X = B^A$. Definiujemy relację w X :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists b_1: A \xrightarrow{\text{bijekcja}} A \exists b_2: B \xrightarrow{\text{bijekcja}} B \quad f \circ b_1 = b_2 \circ g$$

Udowodnić, że \sim jest relacją równoważności. Ile jest klas abstrakcji?

ZADANIE 2.

Niech $X = \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$, czyli zbiór funkcji $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$. Definiujemy relację w X :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \forall q \in \mathbb{Q} \quad |q| < \varepsilon \Rightarrow f(q) = g(q),$$

gdzie $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Jaka moc ma zbiór klas abstrakcji X/\sim ? Czy $|X/\sim| = |X|$?

ZADANIE 3.

Niech $X = \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, czyli zbiór ciągów o wyrazach rzeczywistych dodatnich. Definiujemy relację w X :

$$f \preceq g \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \text{ istnieje i jest skończona.}$$

Sprawdzić, czy ta relacja jest częściowym porządkiem. Czy jest liniowym porządkiem?

Uwaga 1: Sformułować aksjomaty częściowego porządku na podstawie podręcznika

Guzicki-Zakrzewski, Wykłady ze Wstępu do Matematyki, Wykład 10.

Które z aksjomatów są spełnione?

Uwaga 2: W zadaniu dopuszczamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.