(c) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$.
(d) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x = 2^y\}$.
(e) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 : y + 124 = x\}$.
(f) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 : x = y^2\}$.
(g) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 : x = y^2\}$.

3.2. Sprawdź, czy dany zbiór jest funkcją. Jeśli tak, określ jej dziedzinę i przeciwdziedzinę. Jeśli nie, podaj przykład dwóch par o tych samych poprzednikach i różnych następnikach, należących do tego zbioru.

(a) $\{\langle x, Y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) : x \geq 0 \wedge \forall y \in Y\ (x = y^2)\}$.
(b) $\{\langle x, Y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) : x \geq 0 \wedge \forall y\ (y \in Y \Leftrightarrow x = y^2)\}$.
(c) $\{\langle X, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} : y \in X \wedge \forall x \in X\ (y \leq x)\}$.
(d) $\{\langle X, Y\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X \cap Y = \emptyset\}$.
(e) $\{\langle X, Y\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X \cup Y = \mathbb{N}\}$.
(f) $\{\langle X, Y\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X \cup Y = \mathbb{N} \wedge X \cap Y = \emptyset\}$.

3.3. Sprawdź, czy dana funkcja $f : X \to Y$ jest różnowartościowa i czy jest na Y. Jeśli nie jest różnowartościowa, podaj przykład dwóch różnych argumentów, dla których funkcja przyjmuje te same wartości; jeśli nie jest „na", znajdź R_f:

(a) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ dla $x \in \mathbb{R}$.
(b) $X = \mathbb{N}^2$, $Y = \mathbb{N}$, $f(n, m) = 2^n \cdot 3^m$ dla $\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2$.
(c) $X = \mathbb{N}^2$, $Y = \mathbb{N}$, $f(n, m) = 2^n \cdot 4^m$ dla $\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2$.
(d) $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$, $Y = \mathbb{N}$, $f(A) = \min(A)$ dla $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$.
(e) $X = \mathbb{Q}$, $Y = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $f(p) = \{q \in \mathbb{Q} : q < p\}$ dla $p \in \mathbb{Q}$.

3.4. Dla danych liczb naturalnych k i n znajdź:

(a) Liczbę wszystkich funkcji ze zbioru k-elementowego w zbiór n-elementowy.
(b) Liczbę wszystkich funkcji różnowartościowych ze zbioru k-elementowego w zbiór n-elementowy.
(c) Liczbę wszystkich funkcji przekształcających wzajemnie jednoznacznie zbiór k-elementowy na zbiór n-elementowy.
(d) Liczbę wszystkich funkcji rosnących ze zbioru $\{1, \ldots, k\}$ w zbiór $\{1, \ldots, n\}$ (przy założeniu, że $k, n \geq 1$).

3.5. Dla danej funkcji f i zbiorów A, B znajdź $f[A]$ i $f^{-1}[B]$:

(a) $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$, $A = [-1, 2]$, $B = [1, 4]$.
(b) $f(x) = \sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$, $A = [0, \pi]$, $B = \{1\}$.
(c) $f(n, m) = \max(n, m)$ dla $n, m \in \mathbb{N}$, $A = \{10^{56}\} \times \mathbb{N}$, $B = \{10^{56}\}$.
(d) $f(n, m) = \min(n, m)$ dla $n, m \in \mathbb{N}$, $A = \{10^{56}\} \times \mathbb{N}$, $B = \{10^{56}\}$.

W punktach (e) i (f) wyrażenie $a|b$ oznacza: liczba całkowita a jest dzielnikiem liczby całkowitej b.

(e) $f(n, m) = n + m$ dla $n, m \in \mathbb{N}$, $A = \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}^2$, $B = \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}$.
(f) $f(n, m) = nm$ dla $n, m \in \mathbb{N}$, $A = \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}^2$, $B = \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}$.

3.6. Dla danej funkcji $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz zbiorów $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i $B \subseteq \mathbb{R}$ znajdź $f[A]$ i naszkicuj w prostokątnym układzie współrzędnych zbiór $f^{-1}[B]$:

(a) $f(x, y) = xy$, $A = (-1, 1] \times [-2, 2)$, $B = [0, 1)$.
(b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A = (-2, 3] \times [-2, 3)$, $B = (9, 16]$.
(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A = (-1, \sqrt{7}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B = (1, 2]$.
(d) $f(x, y) = |x - y|$, $A = (0, 2) \times (1, 3)$, $B = (0, 1)$.
(e) $f(x, y) = x - y^2$, $A = [-3, 2) \times (-3, -2]$, $B = (0, 1)$.
(f) $f(x, y) = x \sin y$, $A = (1, \infty) \times (0, \pi]$, $B = \{0\}$.
(g) $f(x, y) = x - y$, $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $B = (0, 1]$.

3.7. Dla danej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oraz zbiorów $A \subseteq \mathbb{R}$ i $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ znajdź $f^{-1}[B]$ i naszkicuj w prostokątnym układzie współrzędnych zbiór $f[A]$:

(a) $f(x) = \langle x, x^2\rangle$, $A = (-1, 2]$, $B = (-1, 1] \times (0, 4)$.
(b) $f(x) = \langle x^2, x\rangle$, $A = (-2, 2]$, $B = (1, 9) \times [-2, 2)$.
(c) $f(x) = \langle x^2, x^4\rangle$, $A = (-1, \sqrt{2}]$, $B = (0, 1) \times (-1, 16)$.
(d) $f(x) = \langle |x - 1|, x^2\rangle$, $A = \mathbb{R}$, $B = (0, 1] \times [0, 1]$.
(e) $f(x) = \langle |x - 1|, |x + 1|\rangle$, $A = \mathbb{R}$, $B = (1, +\infty) \times (1, +\infty)$.

3.8. Dla danej funkcji $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oraz zbiorów A, $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naszkicuj w prostokątnym układzie współrzędnych zbiory $f[A]$ i $f^{-1}[B]$:

(a) $f(x, y) = \langle x, x\rangle$, $A = B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$.
(b) $f(x, y) = \langle x + 3, y - 5\rangle$, $A = B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$.
(c) $f(x, y) = \langle y + 1, x - 1\rangle$, $A = B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$.
(d) $f(x, y) = \langle x^2 + 1, y^2 + 1\rangle$, $A = [-3, 2] \times (-3, 2)$, $B = \{\langle x, y\rangle : x = y\}$.
(e) $f(x, y) = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\rangle$, $A = [0, 1] \times [0, 1]$, $B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}$.
(f) $f(x, y) = \langle x + y, x - y\rangle$, $A = [0, 1] \times [0, 1]$, $B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}$.

3.9. Dla danych funkcji f i g znajdź $g \circ f$:

(a) $f(x) = \sin x - 1$ dla $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

(b) $f(x) = \langle \frac{1}{2}x, \frac{3}{2}x \rangle$ dla $x \in \mathbb{R}$, $g(n,m) = m - n$ dla $n, m \in \mathbb{N}$.

(c) W tym zadaniu przyjmujemy, że P jest zbiorem liczb pierwszych (to znaczy $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$) i definiujemy $f(n) = \{k \in \mathbb{N} : k$ jest dzielnikiem $n\}$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $g(X) = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$, gdzie $X = \{p_1, \dots, p_m\}$ jest skończonym niepustym podzbiorem zbioru $P \cup \{1\}$ (innymi słowy, $g(X)$ jest iloczynem wszystkich elementów zbioru $X = \{p_1, \dots, p_m\}$, przy czym $p_i \neq p_j$ dla $i < j$).

(d) $f(X) = \mathcal{P}(X)$ dla $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $g(\mathcal{X}) = \bigcup \mathcal{X}$ dla $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

3.10. Udowodnij, że dana funkcja jest różnowartościowa i znajdź funkcję do niej odwrotną:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \langle x + y, x - y \rangle$.

(c) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, $f(n,m) = \langle 2n + 2m, 2n - 2m \rangle$.

3.11. Dla $n, m \in \mathbb{N}$ niech $A_{n,m}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takich, że $f(n) = m$. Wyznacz zbiory funkcji:

(a) $\bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_{n,m}$.

(b) $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$.

(c) $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$.

(d) $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_{n,m}$.

3.12. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną niepustą rodziną zbiorów. Czy funkcja f określona na $\mathcal{A}$ wzorem

$$f(X) = \mathcal{P}(X) \qquad \text{dla } X \in \mathcal{A},$$

jest różnowartościowa?

3.13. Dany jest niepusty zbiór X i funkcja $f : X \to X$. Udowodnij, że:

(a) Funkcja f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy jedyną funkcją $g : X \to X$ spełniającą warunek $f \circ g = f$ jest id_X.

(b) Funkcja f jest na X wtedy i tylko wtedy, gdy jedyną funkcją $g : X \to X$ spełniającą warunek $g \circ f = f$ jest id_X.

3.14. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B i funkcji f:

(a) $f\big[A \cap f^{-1}[B]\big] = f[A] \cap B$.

(b) $A \cap f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}\big[f[A] \cap B\big]$.

3.15. Dla danych dwóch zbiorów X, Y i funkcji $f : X \to Y$ zdefiniujmy funkcję $\varphi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ wzorem

$$\varphi(A) = f^{-1}[A] \qquad \text{dla } A \subseteq Y.$$

Udowodnij, że funkcja φ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest „na".

3.16. Znajdź funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór $f^{-1}[\{n\}]$ ma dokładnie 2 (odpowiednio: 3, 4, ...) elementy.

3.17. Niech $\langle f_t : t \in \mathbb{R} \rangle$ będzie indeksowaną rodziną funkcji rzeczywistych zdefiniowaną w następujący sposób:

$$f_t(x) = x^2 - 2tx + 1 \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Niech $A_t = f_t^{-1}[\{0\}]$ dla $t \in \mathbb{R}$. Znajdź $\bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} A_t$ oraz $\bigcap\limits_{t \in \mathbb{R}} A_t$.

(b) Niech $B_t = f_t^{-1}[\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}]$ dla $t \in \mathbb{R}$. Znajdź $\bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} B_t$ oraz $\bigcap\limits_{t \in \mathbb{R}} B_t$.

3.18. Dla danego zbioru X niech $S(X)$ oznacza zbiór wszystkich jego permutacji. Funkcja $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ jest określona wzorem

$$\Phi(f, g) = \{\langle f(n), g(n) \rangle : n \in \mathbb{N}\}.$$

Wykaż, że $\Phi[S(\mathbb{N}) \times S(\mathbb{N})] = S(\mathbb{N})$.

3.19. (a) Niech $\langle f_i : i \in I \rangle$ będzie indeksowaną rodziną funkcji taką, że dla dowolnych indeksów $i, j \in I$, zbiór $f_i \cup f_j$ jest funkcją. Udowodnij, że zbiór $\bigcup\limits_{i \in I} f_i$ jest funkcją.

(b) Znajdź indeksowaną rodzinę funkcji $\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ mającą następujące dwie własności:

(1) dla każdego indeksu $n \in \mathbb{N}$, zbiór D_{f_n} jest skończonym podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ oraz $R_{f_n} \subseteq \{0, 1\}$;

(2) dla dowolnej pary różnych indeksów $n, m \in \mathbb{N}$ zbiór $f_n \cup f_m$ nie jest funkcją.

3.20*. Znajdź funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że dla każdego $r \in \mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}[\{r\}]$ ma dokładnie:

(a) 2 elementy,

(b) 3 elementy.

3.21*. Znajdź wszystkie permutacje f zbioru $\mathbb{N}$ spełniające warunek:

(a) $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geq k\ \big(f(n) \leq n\big)$.

(b) $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geq k\ \big(f(n) \geq n\big)$.