9.8. Znajdź wszystkie relacje równoważności w zbiorze $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$. Wskaż odpowiadające im podziały tego zbioru.

9.9. Znajdź liczbę wszystkich klas abstrakcji relacji równoważności $\equiv$ w zbiorze $A = \{k \in \mathbb{Z} : -230 \leq k \leq 2003\}$, określonej następująco:

$$m \equiv l \Leftrightarrow m^2 = l^2 \qquad \text{dla } m, l \in \mathbb{Z}.$$

9.10. Znajdź liczbę wszystkich relacji równoważności w danym zbiorze n-elementowym, gdzie $n > 0$, mających dokładnie:

(a) Dwie klasy abstrakcji.

(b) $n - 1$ klas abstrakcji.

9.11. (a) Czy istnieje relacja równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$, której wszystkie klasy abstrakcji są skończone i jest ich skończenie wiele?

(b) Czy istnieje relacja równoważności w zbiorze $\mathbb{R}$, której wszystkie klasy abstrakcji są co najwyżej przeliczalne i ich zbiór jest co najwyżej przeliczalny?

9.12. (a) Znajdź relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$ mającą dokładnie pięć klas abstrakcji, z czego dwie mają po jednym elemencie, dwie po dwa tysiące elementów, a piąta jest nieskończona.

(b) Znajdź relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$ mającą dokładnie dwie klasy abstrakcji, obie nieskończone.

9.13. Określmy relację $\equiv$ w $\mathbb{R}$ w następujący sposób:

$$x \equiv y \Leftrightarrow \big(x = y \vee \exists k \in \mathbb{Z}\ (x, y \in (k, k+1))\big).$$

Udowodnij, że $\equiv$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{R}$ i opisz jej klasy abstrakcji.

9.14. Niech r_1 i r_2 będą relacjami równoważności w zbiorze A.

(a) Udowodnij, że relacja $r = r_1 \cap r_2$, to znaczy relacja określona następująco:

$$a\ r\ b \Leftrightarrow (a\ r_1\ b \wedge a\ r_2\ b),$$

jest relacją równoważności w zbiorze A.

(b) Opisz, jak otrzymać podział $\mathcal{P} = A/r$ zbioru A, mając dane podziały $\mathcal{P}_1 = A/r_1$ i $\mathcal{P}_2 = A/r_2$.

9.15. Niech r_1 i r_2 będą relacjami równoważności w zbiorze A.

(a) Rozstrzygnij, czy zawsze relacja $r = r_1 \cup r_2$, to znaczy relacja określona następująco:

$$a\ r\ b \Leftrightarrow (a\ r_1\ b \vee a\ r_2\ b),$$

jest relacją równoważności w A.

(b) Niech

$$\mathcal{P}_1 = A/r_1, \qquad \mathcal{P}_2 = A/r_2.$$

Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(1) Relacja $r = r_1 \cup r_2$ jest relacją równoważności w zbiorze A.

(2) Dla dowolnych bloków $P_1 \in \mathcal{P}_1$ oraz $P_2 \in \mathcal{P}_2$ odpowiednich podziałów:

$$\text{jeśli } P_1 \cap P_2 \neq \emptyset, \text{ to } (P_1 \subseteq P_2 \text{ lub } P_2 \subseteq P_1).$$

9.16. Niech r_1 i r_2 będą relacjami równoważności w danym zbiorze A. Udowodnij, że istnieje najmniejsza relacja równoważności zawierająca relację $r_1 \cup r_2$.

9.17. Niech r_1 i r_2 będą relacjami równoważności w zbiorze A. Niech $\mathcal{P}_1 = A/r_1$ oraz $\mathcal{P}_2 = A/r_2$. Definiujemy funkcję $\varphi : A \to \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ wzorem

$$\varphi(a) = \langle [a]_{r_1}, [a]_{r_2} \rangle.$$

(a) Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(1) $r_1 \cap r_2 = \mathrm{id}_A$.

(2) Dla dowolnych bloków $P_1 \in \mathcal{P}_1$ oraz $P_2 \in \mathcal{P}_2$, jeśli $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, to $|P_1 \cap P_2| = 1$.

(3) Funkcja φ jest różnowartościowa.

(b) Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(1) $r_2 \circ r_1 = A^2$.

(2) Dla dowolnych bloków $P_1 \in \mathcal{P}_1$ oraz $P_2 \in \mathcal{P}_2$, $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

(3) Funkcja φ jest funkcją na zbiór $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$.

9.18. Znajdź relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$, której wszystkie klasy abstrakcji są nieskończone i jest ich przeliczalnie wiele.

9.19. Znajdź relację równoważności w zbiorze $\mathbb{R}$, której wszystkie klasy abstrakcji mają moc continuum i zbiór klas abstrakcji ma moc continuum.

9.20. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów X, Y i dowolnej relacji równoważności $\equiv$ w zbiorze X następujące warunki są równoważne:

(1) $|X/{\equiv}| = |Y|$.

(2) Istnieje funkcja $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ taka, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$:

$$x_1 \equiv x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

9.21. Niech $S(n, k)$ oznacza liczbę tych wszystkich relacji równoważności w zbiorze $\{1, \ldots, n\}$, które mają dokładnie k klas abstrakcji $(n \geq k \geq 1)$, a $s_{n,k}$ — liczbę wszystkich funkcji ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ na zbiór $\{1, \ldots, k\}$. Udowodnij, że

$$s_{n,k} = k! \cdot S(n, k).$$