

Zadania pisemne do oddania 11 stycznia 2023 przed godz. 23:59

ZADANIE 1.

Niech

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists f \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{3^n} \right\}$$

będzie zbiorem Cantora, oraz niech

$$C_0 = \left\{ x \in C : \exists n \in \mathbb{N} \quad 3^n x \in \mathbb{N} \right\}.$$

Znaleźć moc zbiorów C_0 oraz $C \setminus C_0$.

ZADANIE 2.

Mówimy, że liczba $a \in \mathbb{C}$ jest algebraiczna, jeśli istnieje niezerowy wielomian o wymiernych współczynnikach

$$f(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + \cdots + q_0, \quad q_i \in \mathbb{Q} \text{ dla } i = 0, 1, \dots, n,$$

którego a jest pierwiastkiem (tzn. $f(a) = 0$). Znaleźć moc zbioru liczb algebraicznych.

ZADANIE 3.

Zadanie sprawdzające wiadomości z wykładu.

Definiujemy relację w zbiorze liczb naturalnych \mathbb{N}

$$a \blacklozenge b \iff 5 \mid (a^5 - b).$$

Czy jest to relacja równoważności?

Z definicji sprawdzić zwrotność, symetryczność i przechodność.