6.8. W każdym z poniższych przypadków, dla danego zbioru X i dowolnego nieskończonego ciągu $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ elementów tego zbioru znajdź, stosując metodę przekątniową, element $z \in X \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$:

(a) $X = \{\langle m_k \rangle_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : m_0 = m_2 = m_4 = \ldots = 0\}$, to znaczy X jest zbiorem wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych, przyjmujących na wszystkich miejscach parzystych wartość 0.

(b) $X = \{\langle m_k \rangle_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \forall l \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ (l^2 < k < (l+1)^2 \Rightarrow m_k = 0)\}$, to znaczy X jest zbiorem wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych, przyjmujących wartość 0 na wszystkich miejscach spoza zbioru $\{0,1,4,9,\ldots\}$, złożonego z kwadratów liczb naturalnych (na tym zbiorze może przyjmować zarówno wartość 1, jak 0).

(c) X jest zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru liczb nieparzystych.

(d) X jest zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru kwadratów liczb naturalnych.

6.9. Udowodnij, stosując metodę przekątniową, że dla każdego ciągu $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, którego wyrazy należą do zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach naturalnych, istnieje ciąg $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taki, że

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ (m < k \Rightarrow f_n(k) < g(k)),$$

to znaczy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wyrazy ciągu g są, począwszy od pewnego miejsca (zależnego od n), większe od odpowiednich wyrazów ciągu f_n.

6.10. Udowodnij, stosując metodę przekątniową, że dla każdego ciągu $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, którego wyrazy należą do zbioru wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach rzeczywistych dodatnich, istnieje ciąg g o wyrazach dodatnich taki, że

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ (m < k \Rightarrow g(k) < f_n(k)),$$

to znaczy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wyrazy ciągu g są, począwszy od pewnego miejsca (zależnego od n), mniejsze od odpowiednich wyrazów ciągu f_n.

6.11*. Udowodnij, stosując metodę przekątniową, że dla każdego ciągu $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, którego wyrazy należą do zbioru wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach rzeczywistych dodatnich, zbieżnych do zera, istnieje ciąg g o wyrazach dodatnich, zbieżny do zera, taki że

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ (m < k \Rightarrow f_n(k) < g(k)).$$

6.12*. Udowodnij, stosując metodę przekątniową, że dla każdego ciągu $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, którego wyrazy należą do zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach naturalnych, istnieje ciąg $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taki, że

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\ (m < k \wedge f_n(k) = g(k)),$$

to znaczy wyrazy dowolnego ciągu f_n są w nieskończenie wielu punktach (zależnych od n) równe odpowiednim wyrazom ciągu g.

WYKŁAD 7 ZBIORY CO NAJWYŻEJ PRZELICZALNE

Zbiór A nazywamy zbiorem **przeliczalnym**, jeśli jest on równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Zbiór A nazywamy **zbiorem co najwyżej przeliczalnym**, jeśli jest on skończony lub przeliczalny.

Zbiór A nazywamy **zbiorem nieprzeliczalnym**, jeśli nie jest on zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

Inaczej mówiąc, zbiór A jest zbiorem nieprzeliczalnym, jeśli jest zbiorem nieskończonym i nie jest zbiorem przeliczalnym.

Uwaga. Często zbiory co najwyżej przeliczalne nazywa się po prostu zbiorami przeliczalnymi. Ta dwuznaczność terminologii na ogół nie prowadzi jednak do nieporozumień. Z kontekstu przeważnie natychmiast wynika, czy rozważany zbiór jest skończony, czy nieskończony.

7.1. Udowodnij, że następujące zbiory są przeliczalne:

(a) Zbiór wszystkich punktów $\mathbb{R}^2$ o obu współrzędnych całkowitych.

(b) Zbiór wszystkich punktów $\mathbb{R}^2$ o obu współrzędnych wymiernych.

(c) Zbiór wszystkich punktów $\mathbb{R}^3$ o trzech współrzędnych wymiernych.

(d) Zbiór wszystkich przedziałów otwartych w $\mathbb{R}$ o obu końcach wymiernych.

(e) Zbiór wszystkich kół otwartych w $\mathbb{R}^2$, które mają wymierne promienie i środki w punktach o obu współrzędnych wymiernych.

7.2. Punktem kratowym płaszczyzny (z ustalonym układem współrzędnych) nazwijmy każdy taki jej punkt, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że zbiór wszystkich prostych, z których każda przechodzi przez co najmniej dwa różne punkty kratowe, jest przeliczalny.

7.3. Udowodnij, że następujące zbiory są przeliczalne:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Q}\ (x^2 + px + q = 0)\}$.

(b) $B = \{X \subseteq \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\ (n \notin X)\}$.

(c) $C = \{\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\ (x_n = 1)\}$.

(d) $D = \{X \subseteq \mathbb{N} : |\mathbb{N} \setminus X| < |\mathbb{N}|\}$.

7.4. Udowodnij, że następujące rodziny zbiorów są co najwyżej przeliczalne:

(a) Dowolna rodzina rozłączna niepustych podzbiorów zbioru przeliczalnego.

(b) Dowolna rodzina rozłączna $\mathcal{A}$ niepustych podzbiorów dowolnego zbioru X mająca własność: istnieje przeliczalny zbiór $S \subseteq X$ taki, że $A \cap S \neq \emptyset$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{A}$.

(c) Dowolna rodzina rozłączna złożona z przedziałów otwartych w $\mathbb{R}$.

(d) Dowolna rodzina rozłączna złożona z kół otwartych w $\mathbb{R}^2$.
(e) Dowolna rodzina rozłączna złożona z kul otwartych w $\mathbb{R}^3$.

7.5. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, jeśli zbiór A jest nieskończony, a zbiór B jest co najwyżej przeliczalny, to $|A \cup B| = |A|$.

7.6. (a) Udowodnij, że zbiór
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{Q}\}$$
jest przeliczalny.

(b) Udowodnij, że jeśli $W(x)$ jest dowolnym wielomianem stopnia dodatniego, to zbiór
$$B = \{x \in \mathbb{R} : W(x) \in \mathbb{Q}\}$$
jest co najwyżej przeliczalny.

(c) Udowodnij, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją taką, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ równanie
$$f(x) - a = 0$$
ma co najwyżej przeliczalnie wiele rozwiązań, to przeciwobraz względem f dowolnego zbioru co najwyżej przeliczalnego $B \subseteq \mathbb{R}$ jest co najwyżej przeliczalny.

7.7. Udowodnij, że dowolny zbiór przeliczalny można podzielić na dwa (odpowiednio: trzy, cztery itd.) parami rozłączne podzbiory przeliczalne.

7.8. (a) Znajdź funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zbiór $f^{-1}[\{n\}]$ jest przeliczalny.

(b) Udowodnij, że dowolny zbiór przeliczalny można podzielić na przeliczalnie wiele parami rozłącznych podzbiorów przeliczalnych.

7.9. Udowodnij, że następujące rodziny zbiorów są przeliczalne:

(a) $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| \neq |\mathbb{N} \setminus A|\}$.

(b) $\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ (|A \cap \{0, \ldots, n\}| \geq n - 10)\}$.

(c) $\mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbb{Z} : |A \mathbin{\dot-} \mathbb{N}| < |\mathbb{N}|\}$.

7.10. (a) Udowodnij, że zbiór $E_0 = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\ (f(n) = 0)\}$, wszystkich ciągów o wyrazach naturalnych, o skończenie wielu wyrazach różnych od 0, jest przeliczalny.

(b) Udowodnij, że jeśli zbiór $A \neq \emptyset$ jest co najwyżej przeliczalny, to zbiór
$$E = \{f \in A^{\mathbb{N}} : \exists a \in A\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\ (f(n) = a)\}$$
wszystkich ciągów o wyrazach ze zbioru A **prawie stałych**, to znaczy stałych od pewnego miejsca, jest przeliczalny.

7.11. Udowodnij, że zbiór
$$\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \exists k > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ (f(n) = f(n+k))\}$$
wszystkich **okresowych** ciągów o wyrazach wymiernych jest przeliczalny.

7.12. Udowodnij, że następujące zbiory ciągów o wyrazach naturalnych są przeliczalne:

(a) $\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}\ (f(n+1) \leq f(n))\}$.

(b) $\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}\ (|f(n) - f(n+1)| < \frac{2004}{n+1})\}$.

(c) $\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}\ (n \cdot f(n) \leq f(0))\}$.

7.13. Udowodnij, że następujące zbiory ciągów są przeliczalne:

(a) Zbiór wszystkich ciągów arytmetycznych nieskończonych o wyrazach wymiernych.

(b) Zbiór wszystkich ciągów geometrycznych nieskończonych o wyrazach wymiernych.

7.14. Niech $\langle q_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem, którego zbiorem wyrazów jest zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wyznacz zbiory:

(a) $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k > n} (q_k - 1, q_k + 1)$.

(b) $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k > n} (q_k - 1, q_k + 1)$.

7.15. Udowodnij, że zbiór wszystkich punktów nieciągłości dowolnej funkcji monotonicznej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest co najwyżej przeliczalny.

7.16. Udowodnij, że dla dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$ zbiór
$$\{x \in X : \exists \varepsilon > 0\ ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X = \{x\})\},$$
złożony z **punktów izolowanych** zbioru X, jest co najwyżej przeliczalny.

7.17. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zbiór
$$\{z \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0\ (\forall x \in \mathbb{R}\ (0 < |x - z| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(z)) \vee \forall x \in \mathbb{R}\ (0 < |x - z| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(z)))\}$$
wszystkich punktów, w których funkcja f ma **ekstremum lokalne właściwe**, jest co najwyżej przeliczalny.