Zadania pisemne na 3-go listopada

Zadanie 1.

a) Czy zbiór

$$D = \Big\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 1 \Big\}$$

jest produktem podzbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$, tzn. czy

$$D = A \times B\,?$$

b) Niech $D \subset X \times Y$. Udowodnić, że D jest równy $A \times B$ dla pewnych $A \subset X$, $B \subset Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy ma następującą własność:

$$\forall x_1, x_2 \in X \ \ \forall y_1, y_2 \in Y \quad \Big(\langle x_1, y_1 \rangle \in D \ \wedge \ \langle x_2, y_2 \rangle \in D \Big) \Rightarrow \langle x_1, y_2 \rangle \in D\,.$$

Zadanie 2. Rozważamy ciągi liczb rzeczywistych $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, które utożsamiamy z funkcjami

$$f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(n) = a_n\,.$$

Definiujemy zbiory ciągów $W_{k,m} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dla $k, m \in \mathbb{N}$

$$W_{k,m} = \Big\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ f(k) < m \Big\}\,.$$

Opisać zbiory

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_{k,m}\,, \qquad \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_{k,m}\,.$$

Wskazówka: jeden z tych zbiorów składa się z ciągów ograniczonych z góry.

Zadanie 3.

Niech $\langle A_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, $\langle B_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ będą wstępującymi ciągami zbiorów tzn. $A_n \subset A_{n+1}$ oraz $B_n \subset B_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B_n) = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n)\,.$$