(d) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(e) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.

(f) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$.

5.3. Dla danych zbiorów A, $B \subseteq \mathbb{R}$ udowodnij, że $|A| = |B|$, znajdując każdorazowo bijekcję z A na B lub z B na A:

(a) $A = (0,1)$, $B = (0,1]$.

(b) $A = (0,1)$, $B = (0,1) \cup \{1,\ 2,\ 3\}$.

(c) $A = (0,1)$, $B = (0,1) \cup \mathbb{N}$.

(d) $A = (0,1)$, $B = (0,1) \cup (2,3)$.

5.4. Dla danych zbiorów A, B udowodnij, że $|A| = |B|$, znajdując każdorazowo bijekcję z A na B lub z B na A:

(a) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{\langle 0,0\rangle\}$.

(b) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

(c) $A = [0,1)$, $B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(d) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$,
$B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1\}$.

5.5. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A i B mamy $|(A \times B)^C| = |A^C \times B^C|$.

5.6. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B i takich, że $B \cap C = \emptyset$, mamy $|A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$.

5.7. (a) Udowodnij, że każda izometria płaszczyzny jest przekształceniem różnowartościowym. Podobnie każda jednokładność, każde podobieństwo i każde przekształcenie afiniczne są przekształceniami różnowartościowymi. Udowodnij, że rzut stereograficzny przekształca wzajemnie jednoznacznie sferę bez jednego punktu na płaszczyznę.

(b) Udowodnij, że dowolne dwa kwadraty na płaszczyźnie są równoliczne.

(c) Udowodnij, że dowolne dwa okręgi na płaszczyźnie są równoliczne.

(d) Udowodnij, że dowolne dwa koła (otwarte lub domknięte) na płaszczyźnie są równoliczne.

(e) Udowodnij, że dowolne koło otwarte na płaszczyźnie jest równoliczne z dowolnym kołem domkniętym na płaszczyźnie.

(f) Udowodnij, że dowolne dwa trójkąty na płaszczyźnie są równoliczne.

(g) Udowodnij, że dowolne dwa czworokąty na płaszczyźnie są równoliczne.

(h) Udowodnij, że sfera jest równoliczna ze sferą bez jednego punktu.

(i) Udowodnij, że sfera bez jednego punktu jest równoliczna z płaszczyzną.

(j) Udowodnij, że sfera jest równoliczna z płaszczyzną.

5.8. Udowodnij, że następujące dwa zbiory są równoliczne:
$A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}\ (f(n) \leq f(n+1))\}$,
$B = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}\ (f(n) < f(n+1))\}$.

WYKŁAD 6 ZBIORY NIERÓWNOLICZNE I PORÓWNYWANIE MOCY ZBIORÓW

6.1. Czy dla dowolnej funkcji f i zbioru $B \subseteq R_f$ zachodzi nierówność:

(a) $|f^{-1}[B]| \leq |B|$?

(b) $|B| \leq |f^{-1}[B]|$?

6.2. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D takich, że $A \cap B = \emptyset$ i $C \cap D = \emptyset$, jeśli $|A| \leq |C|$ oraz $|B| \leq |D|$, to $|A \cup B| \leq |C \cup D|$.

6.3. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D jeśli $|A| \leq |C|$ i $|B| \leq |D|$, to $|A \times B| \leq |C \times D|$.

6.4. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B jeśli $|A| \leq |B|$, to $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$.

6.5. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D jeśli $|A| \leq |C|$ i $|B| \leq |D|$, to $|B^A| \leq |D^C|$.

6.6. Udowodnij, że dla dowolnych co najmniej dwuelementowych zbiorów A, B

$$|A \cup B| \leq |A \times B|.$$

6.7. Udowodnij, stosując metodę przekątniową, że dla dowolnego zbioru $A \neq \emptyset$ i każdej funkcji $f : \mathbb{N} \to A^{\mathbb{N}}$, istnieje ciąg $g \in A^{\mathbb{N}}$ taki, że

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\ (f_n(k) = g(k)).$$

(Zbiór $A^{\mathbb{N}}$ składa się ze wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach z A, f_n jest wartością funkcji f dla argumentu $n \in \mathbb{N}$, czyli ciągiem o wyrazach z A, to znaczy $f_n = \langle f_n(k) : k \in \mathbb{N}\rangle$).