

Reprezentacje Grup i Geometria, Zadania na 10 marca

1 Podać interpretację współczynnika przy q^i w wielomianie $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

2 Wykazać, wzór na sumę długości permutacji

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \ell(\sigma) = \frac{n(n-1)}{4} n!.$$

3 Wykazać, że jeśli G jest skończona, to reprezentacja regularna $K(G)$ jest izomorficzna z $\text{Map}(G, K)$ z działaniem G na $X = G$ przez prawe przesunięcia.

4 Niech $\dim V = n$ oraz

$$S_{2,1}V := \text{im}(\text{sym}^{2,3} : \Lambda^2 V \otimes V \rightarrow V \otimes \text{Sym}^2 V) \subset V \otimes V \otimes V.$$

Obliczyć wymiar $S_{2,1}V$.

5 Niech G będzie skończoną grupą. Wskazać przykład gdy dualna reprezentacja $V^* = \text{Hom}(V, \text{triv})$, nie jest izomorficzna z V . Dla $V = K(G)$ wykazać, że $V \simeq V^*$.

6 Wykazać $\text{End}_G(K(G)) \simeq K(G)$.

7 Wskazać grupę G oraz jej reprezentację na rzeczywistej przestrzeni wektorowej V taką, że algebra $\text{End}_G(V)$ jest izomorficzna z kwaternionami \mathbb{H} .

8 Niech $V = \mathbb{C}^3$ będzie naturalną reprezentacją \mathfrak{S}_3 . Rozłożyć reprezentację $V \otimes V$ na reprezentacje nieprzywiedlne.