

Reprezentacje Grup i Geometria

Streszczenie

aweber at mimuw.edu.pl

http://www.mimuw.edu.pl/~aweber

Motywacja

Kombinatoryka

0.1 Podzbiory w zbiorze skończonym \iff grassmanian:

- Ilość podzbiorów k elementowych w $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ jest równa $\binom{n}{k}$
- Ilość punktów w grassmanianie podprzestrzeni k -wymiarowych w \mathbb{F}_q^n

$$|\mathrm{Gr}_k(\mathbb{F}_q)| = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \dots (q^k - q^{k-1})} =: \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

- Zauważmy

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k} = \dim H^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)).$$

- Notacja

$$[k]_q = (q^k - 1)/(q - 1), \quad [n]!_q = \prod_{k=1}^n [k]_q, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!_q}{[k]!_q [n-k]!_q}$$

- **Ćwiczenia** wyrost: podać interpretację współczynnika przy q^i w wielomianie $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

0.2 Grupa $\mathfrak{S}_n \iff$ przestrzeń flag $\mathrm{Fl}_n = \mathrm{GL}_n / \{\text{górnotrójkątne}\}$:

-

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q - 1).$$

- macierze górnotrójkątne odwracalne B

$$|B(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q - 1)^n$$

-

$$|\mathrm{Fl}_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{k=1}^n \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

-

$$\lim_{q \rightarrow 1} [n]!_q = n! = |\mathfrak{S}_n|.$$

- (Prawdziwa przyczyna: \mathfrak{S}_n jest grupą Weyla dla GL_n . Uogólnienie dla półprostych grup liniowych.)

Ćwiczenie: współczynnik przy q^i w wielomianie $[n]!_q$ jest równy ilości permutacji o długości i , oraz $\dim H^{2i}(\mathrm{Fl}(n))$.

Teoria reprezentacji

0.3

Teoria reprezentacji \mathfrak{S}_\bullet

}

Teoria reprezentacji $\mathrm{GL}_\bullet(K)$: reprezentacje proste

}

Rachunek Schuberta dla grassmanianu $\mathrm{Gr}_\bullet(\mathbb{C}^\infty)$: klasy kohomologii klatek Schuberta

- Kombinatoryczny opis za pomocą diagramów Younga
- Tensorowanie reprezentacji GL_n jest opisane tą samą formułą (Littlewooda-Richardsona) jak mnożenie w kohomologiach Grassmanianu.

Działanie algebry Hecke

0.4 Skoro $H^*(Fl(n)) \simeq \mathbb{Z}(\mathfrak{S}_n)$ to $H^*(Fl(n))$ dopuszcza działanie \mathfrak{S}_n . Zamiast algebry grupowej $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_n)$ naturalnie pojawiają się zdeformowane działania tzw algebry Hecke.

- Grupa \mathfrak{S}_n jest generowana przez transpozycje $s_i = (i, i + 1)$ dla $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Relacje:

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i & \text{gdym } |i - j| > 1, \\ s_i s_j s_i &= s_j s_i s_j & \text{gdym } |i - j| = 1, \\ s_i^2 &= 1. \end{aligned}$$

- Deformujemy algebrę grupową $\mathbb{Z}(\mathfrak{S}_n)$: zmieniamy relację kwadratową

$$s_i^2 = a s_i + b.$$

W szczególności klasyczna algebra Hecke

$$s_i^2 = (q - 1)s_i + q, \quad \text{tzn } (s_i + 1)(s_i - q) = 0$$

lub algebra nil-Hecke

$$s_i^2 = 0.$$

Te działania na $H^*(Fl_n(\mathbb{C}))$ (lub na K-teorii $K(Fl_n(\mathbb{C}))$) mają interpretacje geometryczną.

1 Reprezentacje grup

Według [Gruson, Serganova, A Journey Through Representation Theory, §1.1-3]

1.1 Niech V będzie przestrzenią wektorową nad K (\mathbb{C} lub ogólniej, dowolne ciało). Reprezentacja grupy (grupy topologiczne, algebraicznej) to homomorfizm $\rho : G \rightarrow GL(V)$.

- trywialna reprezentacja $V = K$, będziemy oznaczać *triv*.
- jeśli dany $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ (np $sgn : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$), to G działa na K poprzez mnożenie przez $\phi(g)$.
- podobnie, jeśli zadany charakter, czyli $\phi : G \rightarrow K^*$,

1.2 Działanie G na zbiorze X indukuje reprezentację G na przestrzeni $V = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}e^x$ (reprezentacja permutacyjna)

- \mathfrak{S}_n działa na K^n (naturalna reprezentacja permutacyjna)

$$\rho(\sigma)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

- (reprezentacja regularna) G działa na sobie z lewej strony, $V = K(G) = \bigoplus_{h \in G} K e^h \ni \sum c_h e^h$

$$\rho(g)\left(\sum c_h e^h\right) = \sum c_h e^{gh} = \sum c_{g^{-1}h} e^h.$$

- jeśli G działa na X z prawej strony, to mamy naturalne działanie na zbiorze funkcji $V = Map(X, K)$

$$(g \cdot f)(x) = f(xg)$$

(opuszczam w notacji ρ).

1.3 Izomorfizm reprezentacji

1.4 Ćwiczenie: Wykazać, że jeśli G jest skończona, to reprezentacja regularna $K(G)$ jest izomorficzna z $Map(G, K)$ z działaniem G na $X = G$ przez prawe przesunięcia.

Konstrukcje na reprezentacjach

1.5 Każda naturalna operacja na przestrzeniach liniowych przenosi się na reprezentacje:

- $\oplus, \otimes, \text{Hom}(-, -), \Lambda^k, \text{Sym}^k$, funktory Schura
- np obraz symetryzacji ze względu na drugą i trzecią współrzędną

$$S_{2,1}V := \text{im}(\text{sym}^{2,3} : \Lambda^2 V \otimes V \rightarrow V \otimes \text{Sym}^2 V) \subset V \otimes V \otimes V$$

(ogólniej iloraz $\otimes_i \Lambda^{k_i} V$ zawarty w $\otimes_i \text{Sym}^{w_i} V$, gdzie k_i to kolumny, w_i to wiersze diagramu Younga).

1.6 Ćwiczenie: obliczyć wymiar powyższej reprezentacji.

Wskazówka:

$$V^{\otimes 3} = \Lambda^3 V \oplus \text{Sym}^3 V \oplus S_{2,1}V^{\oplus 2},$$

patrz [Fulton-Harris, p.77]

1.7 „Zewnętrzny produkt” $V \boxtimes W$ jako reprezentacja $G \times H$

1.8 Dualna reprezentacja $V^* = \text{Hom}(V, \text{triv})$, nie zawsze izomorficzna z V .

1.9 Ćwiczenie: G skończona $V = K(G)$, to $V \simeq V^*$.

1.10 G -homomorfizmy $\text{Hom}_G(V, W) = \text{Hom}(V, W)^G$; endomorfizmy $\text{End}_G(V)$.

1.11 Ćwiczenie: $\text{End}_G(K(G)) \simeq K(G)$

1.12 Tw Maschke: Jeśli G jest skończona i $(\text{char}(K), |G|) = 1$, $W \subset V$ podreprezentacja, to istnieje dopełnienie W' takie, że $W \oplus W' = V$.

- Dowód: Niech $\pi : V \rightarrow W$ rzutowanie (nie koniecznie G -niezmiennicze). Uśredniamy: $\frac{1}{|G|} \sum_g \rho(g)\pi\rho(g^{-1})$.

1.13 V jest nieprzywiedlna, jeśli nie ma właściwej podreprezentacji

1.14 Ćwiczenie: V nieprzywiedlna to $\dim V \leq |G|$

1.15 Lemat Schura V, W nieprzywiedlne to albo $\text{Hom}_G(V, W) = 0$ lub $V \simeq W$.

1.16 Wniosek: $\text{End}_G(V)$ jest algebrą z dzieleniem. (Więc, jeśli $K = \overline{K}$, to $\text{End}_G(V) = K$.)

2 Charaktery

2.1 Reprezentacje (nad ustalonym ciałem, które naogół będzie \mathbb{C}) tworzą kategorię abelową $\text{Rep}(G)$

$$\text{Hom}_G(V, W) := \text{Hom}(V, W)^G = \text{Hom}_{K(G)}(V, W)$$

Rozważamy tu tylko skończenie-wymiarowe reprezentacje.

2.2 Jeśli G jest skończona i $(|G|, \text{char}(K)) = 1$, to kategoria $\text{Rep}(G)$ jest półprosta, tzn każdy obiekt jest sumą skończenie wielu obiektów prostych (nie mających właściwych podobiektów)

- zamiast reprezentacja ”prosta” równoważnie mówimy ”nieprzywiedlna”
- Dowód: Indukcja po wymiarze i Tw Maschke.
- Tak samo mamy dla reprezentacji grupy zwartej nad \mathbb{C} lub \mathbb{R} dzięki temu, że w każdej przestrzeni wektorowej można znaleźć niezmienniczy iloczyn skalarny (uśredniając po G).

2.3 Jeśli V jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych, to mamy izomorfizm

$$\bigoplus_{V_\lambda \text{ nieprzywiedlne}} \text{Hom}_G(V_\lambda, V) \otimes V_\lambda \xrightarrow{\cong} V$$

$$\sum_{\lambda} f_\lambda \otimes v_\lambda \mapsto \sum_{\lambda} f_\lambda(v_\lambda).$$

- To jest kanoniczny izomorfizm, funktorialny ze względu na V .

2.4 Bez założenia o G : Reprezentacja półprosta = suma prosta nieprzywiedlnych. Charakteryzacja (przy założeniu, że $\dim < \infty$): dla każdej podreprezentacji istnieje dopełnienie.

2.5 Ogólne uwagi. Ogólna konstrukcja: kategoria abelowa $\mathcal{C} \Rightarrow$ grupa abelowa $K(\mathcal{C})$ tzw „K-teoria kategorii”

$$K(\mathcal{C}) = \text{wolna grupa rozpięta przez klasy izomorfizmu obiektów} / \sim$$

Dla ciągu dokładnego $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ mamy relację $[B] = [A] \oplus [C]$.

2.6 Jeśli kategoria jest półprosta, to

$$K(\mathcal{C}) = \bigoplus_{\text{klasy izomorfizmu obiektów prostych}} \mathbb{Z} \cdot [S]$$

- jeśli w kategorii półprostej \mathcal{C} jest iloczyn tensorowy (struktura kategorii monoidalnej), to $K(\mathcal{C})$ jest pierścieniem.

2.7 Gdy kategoria nie jest półprosta, trzeba brać pochodny iloczyn tensorowy (żeby była zachowana relacja zadana przez ciągi dokładne). Jeśli każdy obiekt ma **skończoną** rezolwentę obiektami płaskimi, to iloczyn tensorowy zadaje mnożenie w $K(\mathcal{C})$.

2.8 To jest ogólny schemat, a my za \mathcal{C} bierzemy kategorię skończenie wymiarowych reprezentacji skończonej G , $K = \mathbb{C}$. Stosujemy oznaczenie: $R(G)$ i nazywamy *pierścień reprezentacji*.

- Podobnie dla reprezentacji grupy zwartej nad \mathbb{C} lub \mathbb{R} .

2.9 Mamy izomorfizmy

$$R(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[x]/(x^n - 1), \quad R(S^1) \simeq \mathbb{Z}[x], \quad R((S^1)^r) \simeq \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$$

- Kanonicznie, jeśli $T \simeq (S^1)^r$

$$R(T) = \mathbb{Z}(T^\vee),$$

gdzie $T^\vee = \text{Hom}(T, S^1)$ jest grupą charakterów, a $\mathbb{Z}(T^\vee)$ jest pierścieniem grupowym.

2.10 Ćwiczenie. Obliczyć $R(\mathfrak{S}_3)$

2.11 Charakter reprezentacji. Dla skończenie wymiarowej reprezentacji $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ niech

$$\chi_\rho : G \rightarrow K, \quad \chi_\rho(g) := \text{tr}(\rho(g)).$$

- Uwaga: charakter reprezentacji na ogół nie jest charakterem grupy, tzn homomorfizmem do K^* .

2.12 Własności:

- Izomorficzne reprezentacje mają takie same charaktery
- g sprzężone z h , to $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(h)$
- $\chi_\rho(1) = \dim(V)$
- $\chi_{\rho \oplus \sigma} = \chi_\rho + \chi_\sigma$
- $\chi_{\rho \otimes \sigma} = \chi_\rho \chi_\sigma$

2.13 Twierdzenie (oczywiste): Charakter reprezentacji zadaje homomorfizm

$$R(G) \rightarrow \mathbb{C}[G]^G = \mathbb{C}_{klas}[G],$$

gdzie $\mathbb{C}[G]^G$ oznacza funkcje na G , które są niezmiennicze ze względu na sprzężenie, tzw funkcje klas (także nazywane funkcje centralne).

2.14 Przykład: $G = \mathfrak{S}_3$: klasy sprzężoności $1, s, r$. Reprezentacje *triv*, *alt*, *std*, gdzie *std* oznacza dwuwymiarową reprezentację standardową (symetrii trójkąta). Tabela charakterów:

	1 (1)	ε (3)	ρ (2)	
<i>triv</i>	1	1	1	$\varepsilon = \text{symetria}, \quad \rho = \text{obrót}.$
<i>alt</i>	1	-1	1	
<i>std</i>	2	0	-1	

W nawiasach ilości elementów w klasach sprzężoności

Zakładamy, że $K = \mathbb{C}$, G jest skończona.

2.15 Biorąc za bazę ortonormalną funkcje charakterystyczne elementów dostajemy iloczyn hermitowski na $\mathbb{C}[G]$

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$$

- (alternatywnie) nad dowolnym ciałem $char = 0$, czysto algebraicznie, mamy formę 2-liniową

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) f_2(g^{-1})$$

2.16 Twierdzenie:

$$(\chi_{\rho_V}, 1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} tr(\rho_V(g)) = tr\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_V(g)\right).$$

Zauważmy, że $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_V(g)$ jest rzutowaniem na V^G . Jego ślad to $\dim V^G$.

2.17 Twierdzenie

$$(\chi_{\rho_V}, \chi_{\rho_W}) = \dim \text{Hom}_G(W, V)$$

- Istnieją iloczyny hermitowskie takie, że G działa przez izometrie. Utożsamiając $W \simeq \mathbb{C}^n$ mamy $\rho : G \rightarrow U(n)$, $\rho_W(g^{-1}) = \overline{\rho_W(g)}$, stąd

$$\overline{\rho_W(g)} = \rho_{W^*}(g),$$

gdzie W^* jest reprezentacją sprzężoną. Zatem

$$(\chi_{\rho_V}, \chi_{\rho_W}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} tr(\rho_V(g)) tr(\rho_{W^*}(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} tr(\rho_{V \otimes W^*}(g)) = \dim \text{Hom}_G(W, V)$$

2.18 Dla charakterów reprezentacji nieprzywiedlnych

$$(\chi_1, \chi_2) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & \text{gdy } \chi_1 \neq \chi_2 \end{cases}$$

2.19 Reprezentacja jest nieprzywiedlna \iff jej charakter χ spełnia $(\chi, \chi) = 1$.

2.20 Krotność reprezentacji nieprzywiedlnej V_λ w V jest równa (χ_λ, χ_V) .

2.21 Ćwiczenie. Policzyc krotności *triv*, *alt*, *std* dla \mathfrak{S}_3 w $std \otimes std$, lub ogólniej $std^{\otimes n}$.
Odp: $\frac{1}{6}(2(-1)^n + 2^n)$, $\frac{1}{6}(2(-1)^n + 2^n)$, $\frac{1}{6}(-2(-1)^n + 2^{n+1})$

2.22 Ćwiczenie. Policz krotkości $triv, alt, std$ dla \mathfrak{S}_3 w reprezentacji regularnej $\mathbb{C}(G)$.

2.23 Reprezentacje są równoważne \iff charaktery są równe.

2.24 Niech ρ_R będzie reprezentacją regularną. Dla dowolnej reprezentacji ρ

$$(\chi_\rho, \chi_{\rho_R}) = \dim \text{Hom}_G(\mathbb{C}(G), V) = \text{Hom}(\mathbb{C}, V) = \dim V$$

2.25 Wniosek: każda reprezentacja nieprzywiedlna V_λ występuje jako składnik reprezentacji regularnej, z krotkością $\dim V_\lambda$.

2.26 Wniosek: Jest skończenie wiele reprezentacji nieprzywiedlnej, nie więcej niż klas sprzężoności w G . Charaktery są liniowo niezależne. (Później wykażemy, że tworzą bazę ortonormalną funkcji klas.)

2.27 Ćwiczenie. Udowodnić

$$\sum_{\lambda} \dim(V_{\lambda})^2 = |G|.$$

2.28 Ćwiczenie. Udowodnić $\mathbb{C}(G) \simeq \bigoplus_{\lambda} \text{Hom}(V_{\lambda}, V_{\lambda})$ jako reprezentacja $G \times G$.

3 Pierścień grupowy, wymiary reprezentacji

Założenia G jest skończona, $\text{char}(k) = 0$, $k = \bar{k}$.

3.1 Uśrednianie endomorfizmu: niech $\phi \in k(G)^G$, $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Definiujemy

$$T_{\phi, \rho} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g^{-1}) \rho(g).$$

• Stwierdzenie $T_{\phi, \rho} \in \text{End}_G(V)$.

Dow:

$$\begin{aligned} \rho(h) T_{\phi, \rho}(g) &= \rho(h) \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g^{-1}) \rho(g) \right) = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g^{-1}) \rho(hg) \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi((h^{-1}gh)^{-1}) \rho(gh) = \\ &= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi((h^{-1}gh)^{-1}) \rho(g) \right) \rho(h) \end{aligned}$$

3.2 Stwierdzenie: Jeśli $\phi \in k(G)^G$ oraz $\phi \perp \chi$ dla wszystkich charakterów, to $\phi = 0$.

• Niech χ będzie charakterem nieprzywiedlnej reprezentacji ρ . Wtedy $T_{\phi, \rho} = a \text{id}$. Z założenia prostopadłości

$$0 = (\chi, \phi) = \text{tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g^{-1}) \rho(g) \right) = \text{tr}(T_{\phi, \rho})$$

Zatem $T_{\phi, \rho} = 0$.

• Zatem $T_{\phi, \rho} = 0$ dla dowolnej reprezentacji. Biorąc $V = k(G)$ mamy

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g^{-1}) g = 0,$$

stąd $\phi \equiv 0$.

3.3 Wniosek: charaktery rozpinają $k(G)^G$.

3.4 Ilość nieprzywiedlnych reprezentacji = ilość klas sprzężoności

3.5 $k \otimes R(G) \simeq k(G)^G$

Wzór Fouriera: kolekcja reprezentacji \Rightarrow funkcja na grupie.

3.6 Izomorfizm reprezentacji $G \times G$

$$\hat{\rho} : k(G) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{\lambda} \text{End}(V_{\lambda}),$$

$$\sum_{g \in G} a_g g \mapsto \left\{ \sum_{g \in G} a_g \rho_{\lambda}(g) \right\}_{\lambda}$$

- Dowód izomorfizmu:

$$k(G) \simeq \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \otimes \text{Hom}_G(V_{\lambda}, k(G)) \simeq \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \otimes \text{Hom}_G(k(G)^*, V_{\lambda}^*) \simeq \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \otimes \text{Hom}(k, V_{\lambda}^*) \simeq \bigoplus_{\lambda} \text{End}(V_{\lambda})$$

- Szukamy wzoru na transformację odwrotną.

Twierdzenie: Przypuśćmy, że $\hat{\rho}(\sum a_g g) = \sum_{\lambda} u_{\lambda}$, $u_{\lambda} \in \text{End}(V_{\lambda})$ wtedy

$$(*) \quad a_g = \sum_{\lambda} \frac{n_{\lambda}}{|G|} \text{tr}(\rho_{\lambda}(g^{-1})u_{\lambda})$$

- Dowód: złożmy, że $\sum_g a_g g = g$

$$\hat{\rho}(g) = \left\{ u_{\lambda} = \rho_{\lambda}(g) \right\}_{\lambda}$$

Stosujemy wzór (*) i liczymy jaki jest współczynnik przy g

$$a_g = \sum_{\lambda} \frac{n_{\lambda}}{|G|} \text{tr}(\rho_{\lambda}(g^{-1})\rho_{\lambda}(g)) = \sum_{\lambda} \frac{n_{\lambda}}{|G|} \text{tr}(\text{id}_{V_{\lambda}}) = \sum_{\lambda} \frac{n_{\lambda}^2}{|G|} = 1$$

Inne współczynniki a_h dla $h \neq g$

$$\sum_{\lambda} \frac{n_{\lambda}}{|G|} \text{tr}(\rho_{\lambda}(h^{-1})a_g \rho_{\lambda}(g)) = \sum_{\lambda} \frac{n_{\lambda}}{|G|} a_g \text{tr}(\rho_{\lambda}(h^{-1}g)) = \frac{a_g}{|G|} \text{tr}(\rho_{k(G)}(h^{-1}g)) = 0$$

Pierścień grupowy [Gruson-Serganova roz 2], [Serre, roz. 6].

3.7 $k(G) \simeq \text{Map}(G, k)$

- w $k(G)$ działanie jest rozszerzeniem liniowym $e^g \cdot e^h = e^{gh}$; później zamiast e^g piszemy g
- działanie w $\text{Map}(G, k)$ jest splotem

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{h \in G} f_1(gh^{-1})f_2(h).$$

- porównujemy działania $e^g \leftrightarrow \delta_g$

$$\delta_{g_1} * \delta_{g_2}(g) = \sum_{h \in G} \delta_{g_1}(gh^{-1})\delta_{g_2}(h) = \delta_{g_1}(gg_2^{-1}) = \begin{cases} 1 & \text{gd}y \quad g_1 = gg_2^{-1} \\ 0 & \text{p.p.} \end{cases}$$

- Splot ma sens dla grup nieskończonych lub ogólniej dla grup topologicznych, ale rozważamy funkcje o zwartych nośnikach i dostajemy algebrę bez 1.

3.8 Reprezentacje grupy $\iff k(G)$ -moduły.

3.9 Dla dowolnego pierścienia R niech 1_R oznacza R jako lewy R moduł. Mamy $\text{End}_R(1_R) \simeq R^{op}$, gdzie „op” oznacza R z odwrotną kolejnością mnożenia.

- Dla $R = k(G)$ mamy $R \simeq R^{op}$, $g \mapsto g^{-1}$.

3.10 Izomorfizm pierścieni

$$k(G) \simeq \bigoplus_{\lambda} \text{End}(V_{\lambda}) \simeq \bigoplus_{\lambda} M_{n_{\lambda}}(k),$$

gdzie $M_{n_{\lambda}}(k)$ oznacza algebrę macierzy.

3.11 Opis centrum: $Z(k(G)) = \bigoplus_{\lambda} Z(M_{n_{\lambda}}(k)) = \bigoplus_{\lambda} k$.

3.12 Zapiszmy $1 \in k(G)$ jako $\sum_{\lambda} e_{\lambda}$, $\hat{\rho}(e_{\lambda}) \in \text{End}(V_{\lambda})$.

- Stwierdzenie:

$$e_{\lambda} = \frac{n_{\lambda}}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\lambda}(g^{-1})g$$

Dowód: Z Definicji 3.1 $\rho_{\mu}(e_{\lambda}) = n_{\lambda}T_{\chi_{\lambda}, \rho_{\mu}}$, więc jest G niezmiennicze. Z Lematu Schura $\rho_{\mu}(e_{\lambda}) = a \text{id}_{V_{\mu}}$,

$$\text{tr}(\rho_{\mu}(e_{\lambda})) = \frac{n_{\lambda}}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\lambda}(g^{-1})\chi_{\mu}(g) = \begin{cases} n_{\lambda} & \text{gdy } \lambda = \mu \\ 0 & \text{gdy } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

- Elementy e_{λ} są rzutowaniami oraz należą do centrum $Z(k(G))$.
- Centrum jest generowane (a nawet rozpięte jako przestrzeń liniowa) przez e_{λ} .

3.13 Odwzorowanie $Z(k(G)) \rightarrow Z(\text{End}(V_{\lambda})) \simeq k$. Niech

$$\omega_{\lambda}(\sum a_g g) = \frac{1}{n_{\lambda}} \sum_g a_g \chi_{\lambda}(g).$$

-

$$\omega_{\lambda}(e_{\mu}) = \frac{1}{n_{\lambda}} \frac{n_{\lambda}}{|G|} \sum_g \chi_{\mu}(g^{-1})\chi_{\lambda}(g) = \delta_{\lambda\mu}$$

3.14 Elementy całkowite w pierścieniu, patrz [Serre §6.4].

3.15 Stwierdzenie: $\forall g \in G$ wartość charakteru $\chi_{\rho}(g)$ jest całkowitą liczbą algebraiczną.

- Bo wartości własne g są pierwiastkami z 1.

3.16 Niech c będzie klasą sprzężoności, $\eta_c = \sum_{g \in c} g \in \mathbb{Z}(G)$. Elementy η_c są funkcjami klas (tzn niezmiennicze ze względu na sprzężanie), więc są w centrum.

- $\eta_c \eta_{c'}$ jest sumą klas $\eta_{c''}$, więc podpierścien generowany przez klasy η_c jest skończenie generowany nad \mathbb{Z} , stąd η_c jest całkowitym elementem w $Z(k(G))$.
- Jeśli $a_c \in k$ są całkowitymi liczbami algebraicznymi to $\sum_c a_c \eta_c$ też jest całkowitym elementem.
- Wniosek: $\omega_{\lambda}(\sum_c a_c \eta_c) = \frac{1}{n_{\lambda}} \sum_g a_{[g]} \chi_{\lambda}(g)$ jest liczbą algebraiczną.

3.17 Twierdzenie: Wymiary n_{λ} dzielą $|G|$.

- Dow. Niech $\sum_g \chi_{\lambda}(g^{-1})g$ jest postaci $\sum a_c \eta_c$ jak wyżej. Zatem

$$\omega_{\lambda}(\sum_g \chi_{\lambda}(g^{-1})g) = \frac{1}{n_{\lambda}} \sum_g \chi_{\lambda}(g^{-1})\chi_{\lambda}(g) = \frac{|G|}{n_{\lambda}} (\chi_{\lambda}(g), \chi_{\lambda}(g)) = \frac{|G|}{n_{\lambda}}$$

jest całkowitą liczbą algebraiczną oraz należy do \mathbb{Q} . Więc $\frac{|G|}{n_{\lambda}} \in \mathbb{Z}$.

- Można lepiej: n_{λ} dzieli indeks $(G : Z(G))$.

Wierna reprezentacja

3.18 Niech V będzie wierną reprezentacją (tzn ρ jest mono, tzn grupa działa efektywnie). Twierdzenie: każda reprezentacja V_λ pojawia się w pewnej potędze tensorowej V .

- Przypuśćmy $\forall \lambda (\chi_\rho^i, \chi_\lambda) = 0$. Definiujemy

$$(*) = \sum_{i=0}^{\infty} (\chi_\rho^i, \chi_\lambda) t^i = 0$$

jako szereg formalny

$$(*) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \chi_\rho^i t^i, \chi_\lambda \right) = \left(\frac{1}{1 - \chi_\rho t}, \chi_\lambda \right)$$

Stąd

$$\frac{\dim V_\lambda}{1 - \dim V t} = - \sum_{g \neq 1} \frac{\chi_\lambda(g^{-1})}{1 - \chi_\rho(g) t}.$$

To są funkcje wymierne z jednym biegunem w $t = (\dim V_\rho)^{-1}$. Ten biegun musi pojawić się po prawej stronie, więc dla pewnego $g \neq 1$

$$\chi_\rho(g) = \dim V.$$

To jest element skończonego rzędu, więc $|Re(a)| \leq 1$ dla wartości własnych. Zatem jeśli $\rho(g) \neq id$, to $Re(tr(\rho(g))) < \dim V$. Ale $\rho(g) \neq id$ bo reprezentacja jest wierna.

4 Grassmanniany

4.1 Griffiths-Harris, *Principles of algebraic geometry*, Rozdział 1.5

4.2 Klasyczny i najbardziej znany problem: ile jest prostych w \mathbb{P}^3 przecinających 4 ustalone proste znajdujące się w generycznym położeniu?

- Proste w $\mathbb{P}^3 \iff$ płaszczyzny w \mathbb{C}^4 przechodzące przez 0, tzn elementy grassmanianu $Gr_2(\mathbb{C}^4)$.
- Zbiór prostych przecinających ustaloną prostą = rozmaitość Schuberta kowymiaru 1, zdefiniowana przez warunek $\dim(V \cap \mathbb{C}^2) > 0$ (ewentualnie przesunięta elementem $g \in GL_2(\mathbb{C})$). Ten warunek Schuberta odpowiada podziałowi $\lambda = (1, 0)$. Taką rozmaitość Schuberta oznaczamy $X_\lambda = X_1$ (pomijamy 0 w notacji).
- Przecinanie (po ewentualnym przesunięciu o generyczny element $g \in GL_2(\mathbb{C})$) jest równoważne mnożeniu w kohomologiach grassmannianu.
- $[X_1]^4 = [X_1]^2([X_2] + [X_{1,1}]) = [X_1]([X_1][X_2] + [X_1][X_{1,1}]) = [X_1]([X_{2,1}] + [X_{2,1}]) = 2[X_{2,2}]$
- Rozmaitość Schuberta $X_{2,2}$ to punkt.
- Odpowiedź: są dokładnie 2 proste przecinające 4 ustalone proste znajdujące się w generycznym położeniu.

5 Reprezentacje indukowane i algebra Hecke

[Serre, roz 7], [Gurson-Serganova roz 2.6]

5.1 Niech $H \subset G$ podgrupa, W reprezentacja G . Definiujemy reprezentację H oznaczaną $Res_G^H(W)$, która jest równa W jako przestrzeń wektorowa, z działaniem H .

5.2 Niech V będzie reprezentacją H , definiujemy

$$Ind_H^G(V) := k(G) \otimes_{k(H)} V$$

- Funktory Ind_H^G i Res_G^H są dołączone

$$\text{Hom}_H(V, Res_G^H(W)) = \text{Hom}_G(Ind_H^G(V), W)$$

- **Ćwiczenie:** Uogólnić dla odwzorowania $H \rightarrow G$.

5.3 Opis $Ind_H^G(V)$: Niech $S \subset G$ będzie zbiorem reprezentantów G/H (zakładamy, że G jest skończona, więc S jest skończony). Addytywnie

$$Ind_H^G(V) = \bigoplus_{s \in S} s \otimes V$$

• Ważny przykład: $Ind_H^G(triv_H)$ ma bazę indeksowaną warstwami $G/H \simeq S$. Można utożsamić z funkcjami na G/H .

5.4 Działanie $g \in G$ na $s \otimes v$:

$$g(s \otimes v) = gs \otimes v = th \otimes v = t \otimes h \cdot v$$

gdzie $h \in H, t \in S$ są wyznaczone jednoznacznie przez warunek $gs = th$, czyli

$$g(s \otimes v) = t \otimes t^{-1}gs \cdot v.$$

5.5 Charaktery:

$$\chi_{Ind_H^G(V)}(g) = \sum_{s \in S, s^{-1}gs \in H} \chi_V(s^{-1}gs)$$

(z poprzedniego wzoru bierzemy składniki sumy prostej dla których $s = t$).

• Równoważnie (uśredniając po wszystkich wyborach reprezentantów warstw)

$$\chi_{Ind_H^G(V)}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{s \in G, s^{-1}gs \in H} \chi_V(s^{-1}gs).$$

5.6 Jeśli H jest normalna, $g \notin H$ to $\chi_{Ind_H^G(V)}(g) = 0$.

• $s^{-1}gs \in H \iff g \in H$

5.7 Dołączoność funktorów Ind i Res przekłada się na relację pomiędzy charakterami

$$\left(\chi_V, \chi_{Res_G^H(W)} \right)_H = \left(\chi_{Ind_H^G(V)}, \chi_W \right)_G$$

(bo LHS= $\dim \text{Hom}_H$, RHS= $\dim \text{Hom}_G$.)

5.8 Niech $B = H \subset G$. Reprezentacja $Res_G^B Ind_B^G(triv_B)$: funkcje na G/B z działaniem B .

• Najważniejszy przykład $G = \text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

5.9 Twierdzenie: Niech $\mathfrak{S} \subset G$ wybór reprezentantów $B \setminus G/B$

$$Res_G^B Ind_B^G(V) \simeq \bigoplus_{s \in \mathfrak{S}} Ind_{B \cap sBs^{-1}}^B V^s$$

gdzie $V^s = V$ z działaniem $b \in B \cap sBs^{-1}$ przez sprzężenie $b \odot v = s^{-1}bs \cdot v$.

5.10 Dw: Niech $W^s = k(B) \cdot (s \otimes V)$.

Mamy epimorfizm zadany przez działanie

$$Ind_{B \cap sBs^{-1}}^B V^s \rightarrow W^s$$

$$b \otimes v \mapsto bs \otimes v$$

Wymiar LHS jest równy $(B : B \cap sBs^{-1}) \dim(V)$.

RHS: niech $U \subset B$ wybór reprezentantów B/sBs^{-1} . Element $b \cdot (s \otimes v)$ przedstawiamy jednoznacznie jako

$$b \cdot (s \otimes v) = usb's^{-1} \cdot (s \otimes v) = usb' \otimes v = us \otimes b'v.$$

Zatem $\dim(\text{LHS}) = \dim(\text{RHS})$.

•

$$Res_G^B Ind_B^G(V) = \bigoplus_{s \in \mathfrak{S}} W_s.$$

5.11 Przypadek $V = \text{triv}_B$: przestrzeń W^s to są funkcje na B -orbicie elementu $sB \in G/B$.

5.12 Kryterium Mackeya: Załóżmy, że V jest nieprzywiedlną reprezentacją B . Czy $\text{Ind}_B^G V$ jest nieprzywiedlna?

- Wystarczy policzyć

$$\begin{aligned} (\chi_{\text{Ind}_B^G V}, \chi_{\text{Ind}_B^G V})_G &= (\chi_V, \chi_{\text{Res}_G^B \text{Ind}_B^G V})_B = \\ &= \sum_{s \in \mathfrak{S}} (\chi_V, \chi_{\text{Ind}_{B \cap sBs^{-1}}^B V^s})_B = \sum_{s \in \mathfrak{S}} (\text{Res}_B^{B \cap sBs^{-1}} \chi_V, \chi_{V^s})_{B \cap sBs^{-1}} \stackrel{?}{=} 1 \end{aligned}$$

5.13 Kryterium Mackeya: $\text{Ind}_B^G V$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $s \in G \setminus B$ reprezentacje grupy $B \cap sBs^{-1}$:

- 1) obcięcie V do $sBs^{-1} \cap B$
 - 2) V^s , czyli obcięcie ze skręconym działaniem
- nie mają wspólnych składników.

5.14 Algebra Hecke: Niech $B \subset G$. Definiujemy $\mathcal{H}(G, B) = \text{End}_G(\text{Ind}_B^G(\text{triv}_B))$.

5.15 Z dołączenia $\mathcal{H}(G, B) = \text{Hom}_B(\text{triv}_B, \text{Res}_G^B \text{Ind}_B^G(\text{triv}_B)) = (\text{Ind}_B^G(\text{triv}_B))^B$, można to interpretować, jako

- funkcje stałe na B -orbitach w G/B .
- funkcje na $B \setminus G/B$

5.16 Baza

$$\eta_g = \frac{1}{|B|^2} \sum_{b_1, b_2 \in B} b_1 g b_2$$

gdzie g przebiega zbiór $\mathfrak{S} \simeq B \setminus G/B$

5.17 Mnożenie

$$\eta_g \eta_h = \frac{1}{|B|} \sum_{k \in \mathfrak{S}} |gBh \cap BkB| \eta_k$$

- Uzasadnienie:

$$\eta_g \eta_h = \frac{1}{|B|^4} \sum_{b_1, b_2, b_3, b_4} b_1 g b_2 b_3 h b_4 = \frac{1}{|B|^3} \sum_{b_1, b_2, b_3} b_1 g b_2 h b_3 = \sum_{k \in \mathfrak{S}} a_k \eta_k.$$

Składnik $b_1 g b_2 h b_3$ chcemy zapisać jako $b_5 k b_6$. Wystarczy rozwiązywać równanie

$$g b_2 h = b_5 k b_6$$

i wszystkich rozwiązań poprzedniego równania będzie $|B|^2$ razy więcej. Stąd współczynnik przy η_k jest równy $1/|B|$ razy ilość rozwiązań równania na b_2 : $g b_2 h \in BkB$

5.18 Jeśli $e \in G$ to wlement η_e jest jedynką (obustronną)

$$\eta_g \eta_e = \frac{1}{|B|} \sum_{k \in \mathfrak{S}} |gBe \cap BkB| \eta_k = \frac{1}{|B|} |gB \cap BgB| \eta_g = \eta_g$$

5.19 Ćwiczenie: Oposać algebrę Hecke dla $G = \text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, B = górnotrójkątne: $\eta_s \cdot \eta_s = ?$

6 Algebra Hecke: najważniejszy przykład $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q), B)$

6.1 Ogólne własności algebry Hecke $\mathcal{H}(G, B)$. (Teoria ma sens jeśli każda warstwa podwójna BgB jest skończoną sumą warstw gB , ale my zakładamy, że G jest skończona.)

6.2 Ślad i forma kwadratowa w $k(G)$:

- dla $f \in k(G)$ niech $\mathrm{tr}(f) = f(e)$. To jest ślad działania f na $k(G)$. Spełnia $\mathrm{tr}(f_1 f_2) = \mathrm{tr}(f_2 f_1)$.
- definiujemy formę $\phi(f_1, f_2) = \mathrm{tr}(\hat{f}_1 f_2)$, gdzie $\hat{f}(g) := f(g^{-1})$. To jest niezdegenerowana forma $\phi(f, f) = \sum_{h \in G} f(h)^2$.

6.3 Ślad i forma ϕ indukują ślad i niezdegenerowaną formę na $\mathcal{H}(G, B)$. Ślad normujemy tak by $\mathrm{tr}(\mathbb{1}_e) = 1$.

- **Ćwiczenie:** Udowodnić, element sprzężony do η_g jest równy $\eta_{g^{-1}}$, tzn

$$\phi(\eta_g \cdot \alpha, \beta) = \phi(\alpha, \eta_{g^{-1}} \cdot \beta)$$

dla $\alpha, \beta \in \mathcal{H}(G, B)$

6.4 Przykład: $G = \mathfrak{S}_n$, $B = \mathfrak{S}_{n-1}$ (stabilizator $n \in [n]$).

- $G = B \sqcup BgB$, gdzie $g \notin B$
- $\eta_g \cdot \eta_g = \frac{1}{(n-1)!} (|gBg \cap B| \eta_e + |gBg \cap BgB| \eta_g)$
- gdy $g = (n, n-1)$, to $gBg^{-1} = gBg =$ stabilizator $n-1 \in [n]$, więc $gBg \cap B \simeq \mathfrak{S}_{n-2}$
- $gBg \cap BgB = gBg \setminus B$, $|gBg \setminus B| = (n-1)! - (n-2)! = (n-2)(n-2)!$

$$\eta_g \cdot \eta_g = \frac{1}{(n-1)!} ((n-2)! \eta_e + (n-2)(n-2)! \eta_g) = \frac{1}{n-1} \eta_e + \frac{n-2}{n-1} \eta_g$$

Przyjmijmy $\tilde{\eta}_g = (n-1)\eta_g$, wtedy $\tilde{\eta}_g^2 = (n-1)\eta_e + (n-2)\tilde{\eta}_g$ (Por. [A. Krieg, *Hecke Algebras*] str.18)

- To jest algebra przemienna izomorficzna z $k \oplus k$, bo nie ma nilpotentów

$$(a\eta_e + \tilde{\eta}_g)^2 = a^2 \eta_e + 2a\tilde{\eta}_g + (n-1)\eta_e + (n-2)\tilde{\eta}_g = 0 \iff a^2 + n - 1 = 0, \quad 2a + n - 2 = 0 \quad \checkmark$$

6.5 Jeśli B jest normalna, to

$$\mathrm{Res}_G^B \mathrm{Ind}_B^G(V) \simeq \bigoplus_{s \in \mathfrak{S}} V^s$$

więc

$$\mathcal{H}(G, B) = \bigoplus_{s \in G/B} \mathrm{triv}_B \simeq k(G/B).$$

- Podobnie, jeśli $N \subset B$ podgrupa normalna w G , to

$$\mathcal{H}(G, B) \simeq \mathcal{H}(G/N, B/N).$$

6.6 Algebrę $\mathcal{H}(G, B)$ można interpretować jako

- podzbiór $k(G)$, czyli funkcji na G , składający się z funkcji $B \times B$ niezmienniczych. Element $\eta_g = \frac{1}{|B|^2} \sum b_1 g b_2$ jest funkcją o nośniku równym BgB i tam jest równa $|(B \times B)_g|/|B|^2$, gdzie $(B \times B)_g = \{(b_1, b_2) \in B \times B \mid b_1 g b_2 = g\}$, tzn stabilizator g .
- $b_1 g b_2 = g \iff g b_2 g^{-1} = b_1^{-1} \in B$, stąd $|(B \times B)_g| = |B \cap gBg^{-1}|$.
- $\mathcal{H}(G, B)$ jako funkcje B -niezmiennicze na G/B . Wtedy η_g jest funkcją stałą na nośniku BgB/B równą $|B \cap gBg^{-1}|/|B| = (B : B \cap gBg^{-1})^{-1}$.
- Mnożenie funkcji na G/B to konwolucja $f \odot g := p_!(p^!(f) * p^!(g))$, gdzie $p : G \rightarrow G/B$, $p^!(f) = f \circ p$, $p_!(f) =$ uśrednianie po włóknach p oraz $*$ to splot funkcji na G .
- Inna baza $\mathcal{H}(G, B)$

$$\mathbb{1}_g = (B : B \cap gBg^{-1}) \eta_g,$$

czyli funkcja charakterystyczna orbity BgB/B w G/B .

- Oznaczenie używane w [Krieg, *Hecke Algebras*]:
 $\mathrm{ind}(BgB) := |BgB/B| = (B : \mathrm{Stab}(g)) = (B : B \cap gBg^{-1})$.

6.7 Niech $T_0 = \sum_{g \in \mathfrak{S}} \mathbb{1}_g = \sum_{g \in \mathfrak{S}} (B : B \cap gBg^{-1})\eta_g$ wtedy T_0 spełnia

$$T_0 T = c(T) T_0$$

dla każdego $T \in \mathcal{H}(G, B)$.

Ćwiczenie: Obliczyć stałą $c(T)$. (Prop 1.2 str 33 [Krieg])

6.8 Ćwiczenie: Czy $\mathcal{H}(\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_2)$ jest przemienna?

$4!/2! = 12$ jednostronnych warstw, 7 podwójnych: $\{12\}34, \{12\}43, \{34\}12 \sim \{34\}21, \{23\}14 \sim \{13\}24, \dots$

6.9 Opis $Res_G^B Ind_B^G(triv_B)$ dla $G = GL_2(\mathbb{F}_q)$, $B = B_2(\mathbb{F}_q)$ -górnotrójkątna

- $G/B = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) = B/B \sqcup BsB/B$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_2 = \{id, s\}$.
- Ogólnie:

$$Res_G^B Ind_B^G(V) \simeq V \oplus Ind_T^B V^s,$$

gdzie $T = B \cap sBs$ jest grupą macierzy diagonalnych, więc $B/(B \cap sBs) \simeq \mathbb{F}_q$.

- Jeśli $V = triv_B$, to

$$Res_G^B Ind_B^G(V) \simeq triv_B \oplus Ind_T^B triv_T, \quad Ind_T^B triv_T = \bigoplus_{a \in \mathbb{F}_q} k_a.$$

- Działanie B na $\bigoplus_{a \in \mathbb{F}_q} k_a$

$$1_a \in k_a \subset Ind_T^B triv_T, \quad \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \cdot 1_a = 1_b$$

gdzie

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix},$$

czyli $b = (xa + y)z^{-1}$.

6.10 Podstawowy rachunek dla $\mathcal{H}(GL_2(\mathbb{F}_q), B_2(\mathbb{F}_q))$. Baza η_e, η_s .

$$\eta_s \eta_s = \frac{1}{|B|} (|sBs \cap BeB| \eta_e + |sBs \cap BsB| \eta_s)$$

- $|B| = q(q-1)^2$
- Elementy sBs to macierze dolnotrójkątne, $|sBs \cap B| = |T| = (q-1)^2$
- BsB to macierze nie górnotrójkątne (z rozkładu Bruhata), $BsB = G \setminus B$, więc $|sBs \cap BsB| = |sBs \cap G| - |sBs \cap B| = (q-1)^2 q - (q-1)^2 = (q-1)^3$
- Stąd

$$\eta_s \eta_s = \frac{1}{q} \eta_e + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \eta_s$$

- Dla $q \rightarrow 1$ dostajemy $\eta_s \eta_s = \eta_e$
- Inne generatory $\mathbb{1}_s = (B : B \cap sBs) \eta_s = q \eta_s$, $\mathbb{1}_e = \eta_e$

$$\mathbb{1}_s^2 = q \mathbb{1}_e + (q-1) \mathbb{1}_s.$$

6.11 Najważniejszy dla nas przykład: $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ algebra Hecke $\mathcal{H}(G, B)$. Utożsamiamy $\pi \in \mathfrak{S}_n$ z macierzą permutacji.

- Niech $\tau_i = (i, i+1)$ transpozycja ($1 \leq i < n$). Definiujemy podgrupę $P_i = \langle B, \tau_i \rangle$ (*minimalna paraboliczna*).
- P_i jest blokowo górnotrójkątna. Pod przekątną jedynie wyraz $a_{i+1, i}$ może być $\neq 0$.
- to jest stabilizator częściowej flagi standardowej $\{\mathbb{F}_q^k\}_{k \neq i}$.
- Włóknem rzutowania $p_i : G/B \rightarrow G/P_i$ jest $P_i/B \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$

6.12 Niech $\pi \in \mathfrak{S}_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Mamy

$$B\pi B\tau_i B/B \subset p_i^{-1}p_i(B\pi B/B).$$

- Inne sformułowanie: Lemat (Krieg 4.2, str. 64).

$$B\pi B\tau_i B \subset B\pi B \cup B\pi\tau_i B$$

Podobnie

$$B\tau_i B\pi B \subset B\pi B \cup B\tau_i\pi B$$

- Odwzorowanie $p_i : B\pi B/B \rightarrow G/P_i$ jest różnowartościowe jeśli $\pi(i) < \pi(i+1)$, w przeciwnym przypadku jest $q : 1$.

6.13 Twierdzenie:

$$\mathbb{1}_\pi \mathbb{1}_{\tau_i} = \begin{cases} \mathbb{1}_{\pi\tau_i} & \text{gdy } \pi(i) < \pi(i+1), \\ q\mathbb{1}_{\pi\tau_i} + (q-1)\mathbb{1}_\pi & \text{gdy } \pi(i) > \pi(i+1). \end{cases}$$

W pierwszym przypadku $\ell(\pi\tau_i) = \ell(\pi) + 1$, w drugim $\ell(\pi\tau_i) = \ell(\pi) - 1$.

- gdy $\pi(i) < \pi(i+1)$ (tzn $\ell(\pi\tau_i) = \ell(\pi) + 1$) wtedy $B\pi B\tau_i B/B = B\pi\tau_i B/B$, więc $\mathbb{1}_\pi \mathbb{1}_{\tau_i} = \mathbb{1}_{\pi\tau_i}$.
- Przypuśćmy, że $\ell(\pi\tau_i) < \ell(\pi)$. Niech $\pi' = \pi\tau_i$. Wtedy $\pi'\tau_i = \pi$ i stosujemy poprzednie obliczenie oraz:

$$\mathbb{1}_{\tau_i}^2 = (q-1)\mathbb{1}_{\tau_i} + q\mathbb{1}_e.$$

Mamy

$$\mathbb{1}_\pi \mathbb{1}_{\tau_i} = \mathbb{1}_{\pi'} \mathbb{1}_{\tau_i} \mathbb{1}_{\tau_i} = \mathbb{1}_{\pi'}((q-1)\mathbb{1}_{\tau_i} + q\mathbb{1}_e) = (q-1)\mathbb{1}_\pi + q\mathbb{1}_{\pi\tau_i}.$$

6.14 Wniosek: jeśli $\pi = \tau_{i_1}\tau_{i_2}\dots\tau_{i_\ell}$ jest zredukowanym przedstawieniem permutacji, to

$$\mathbb{1}_\pi = \mathbb{1}_{\tau_{i_1}} \mathbb{1}_{\tau_{i_2}} \dots \mathbb{1}_{\tau_{i_\ell}}.$$

6.15 Opis algebry $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n, B)$:

- generowana przez $T_i = \mathbb{1}_{\tau_i}$
- spełnione relacje warkoczowe $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$, poza tym przemienne
- relacja kwadratowa $T_i^2 = q\mathbb{1}_e + (q-1)T_i$.

7 Abstrakcyjna algebra Hecke i różne jej reprezentacje

7.1 Algebra Hecke $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n, B)$, przy $q \rightarrow 1$ zbiega do pierścienia grupowego $k(\mathfrak{S}_n)$.

7.2 W $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q), B)$ dla $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ jest iloczyn skalarny (hermitowski). Operator sprzężony $T_w^* = T_{w^{-1}}$.

7.3 Dla podreprezentacji $W \subset \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q), B)$ dopełnienie ortogonalne jest podreprezentacją.

7.4 Niech $k = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q), B)$ jako moduł jest półprosty. Zatem (tw Wedderburna-Artina) $\mathcal{H}_n \simeq \bigoplus_\lambda \mathrm{End}(V_\lambda)$.

• Twierdzenie (tba): Jest odpowiedniość pomiędzy reprezentacjami \mathfrak{S}_n a \mathcal{H}_n zachowująca wymiar. Zatem $\mathcal{H}_n \simeq \mathbb{C}(\mathfrak{S}_n)$.

7.5 Abstrakcyjna algebra Hecke dla grupy Coxetera (generowanej przez elementy s_i , t.ż. $s_i^2 = 1$, z relacjami warkoczowymi zakodowanymi w grafie)

- Algebra \mathcal{H} jest generowana przez T_i spełniające relacje warkoczowe oraz $T_i^2 = aT_i + b$.
- Złożenie $T_\pi = T_{\tau_{i_1}} T_{\tau_{i_2}} \dots T_{\tau_{i_\ell}}$ nie zależy od zredukowanego przedstawienia $\pi = \tau_{i_1}\tau_{i_2}\dots\tau_{i_\ell}$

7.6 Przykład $\partial_i := p_i^* p_{i*} \in \text{Aut}(H^*(\text{GL}_n(\mathbb{C})/B_n(\mathbb{C})))$, gdzie $p_i : \text{GL}_n(\mathbb{C})/B_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})/P_i(\mathbb{C})$ rzutowanie na przestrzeń częściowych flag.

-
- Operacje $p_i^* p_{i*}$ nazywane są operacjami Deazura lub BGG (od Bernstein-Gelfand-Gelfand).
- Twierdzenie: Niech $[X_e] \in H^*(\text{GL}_n(\mathbb{C})/B_n(\mathbb{C}))$ będzie klasą punktu. Wtedy $x_\pi := T_\pi([X_0])$ jest klasą kohomologii rozmaitości Schuberta X_π

7.7 Działanie algebry nil-Hecke na wielomianach przez różnice podzielone (divided differences)

$$(\partial_i f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n)}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}$$

- $H^*(Fl(\mathbb{C}^n))$ jest ilorazem $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ i to jest podniesienie działania δ_i .

7.8 Przykład: $T_i := p_i^* p_{i*} \in \text{Aut}(K(\text{GL}_n(\mathbb{C})/B_n(\mathbb{C})))$, gdzie $K(-)$ jest K-teorią snopów koherentnych (która dla G/B jest izomorficzna z topologicznym $K^0(G/B)$)

- Tożsamość kwadratowa

$$T_i^2 = T_i.$$

-

$$T_\pi([\mathcal{O}_{pt}]) = [\mathcal{O}_{X_\pi}]$$

7.9 Działanie na wielomianach Laurenta przez *izobaryczne* różnice podzielone (divided differences)

$$(\beta_i f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f}{1 - x_{i+1}/x_i} + \frac{s_i f}{1 - x_i/x_{i+1}} = \frac{x_i f - x_{i+1} s_i f}{x_i - x_{i+1}}$$

- $K(Fl(\mathbb{C}^n))$ jest ilorazem $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ i to jest podniesienie tego działania.

7.10 Zmodyfikowane działanie $\beta_i^\circ f = \beta_i f - f$

$$(\beta_i^\circ f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f}{1 - x_{i+1}/x_i} - f + \frac{s_i f}{1 - x_i/x_{i+1}} = x_{i+1} \partial_i(f)$$

- Ta operacja spełnia relację warkoczową i

$$(\beta_i^\circ)^2 = -\beta_i^\circ$$

7.11 Niech $\beta_i = p_i^* p_{i*} \in \text{Aut}(K(\text{GL}_n(\mathbb{C})/B_n(\mathbb{C})))$. Wtedy $T_i = (1 - qL_i)\beta_i - id$, gdzie $L_1 = T_{G/B \rightarrow G/P_i}^*$ jest relatywną wiązką kostyczną, spełnia kwadratową relację Hecke i relację warkoczową:

- Dla wygody definiujemy $D_i = T_i + id = (1 - qL_i)\beta_i$. Należy sprawdzić

$$(D_i - 1)^2 = (q - 1)(D_i - 1) + q,$$

czyli

$$D_i^2 - 2D_i + 1 = (q - 1)D_i + 1, \\ D_i^2 = (q + 1)D_i.$$

Sprawdzamy dla \mathbb{P}^1

$$D(\mathcal{O}(k)) = (1 - q\mathcal{O}(-2))\beta(\mathcal{O}(k)) = (1 - q\mathcal{O}(-2))(k + 1).$$

$$D^2(\mathcal{O}(k)) = D(1 - q\mathcal{O}(-2))(k + 1) = (1 - q\mathcal{O}(-2))(k + 1)\beta(1 - q\mathcal{O}(-2)) = (1 - q\mathcal{O}(-2))(k + 1)(q + 1).$$

7.12 Podniesienie powyższej operacji do wielomianów Laurenta

$$T_i = (1 - qx_2/x_1)\beta_i - id$$

- Dla $q = 0$ dostajemy β_i°
Relacje Hecke i warkoczowe przy działaniu na wielomianach sprawdzamy za pomocą Wolfram-Mathematiki.

7.13 Patrz też P. Aluffi, L.C. Mihalea, J. Schürmann, C. Su: Motivic Chern classes of Schubert cells, Hecke algebras, and applications to Casselman's problem, arXiv preprint arXiv:1902.10101

8 Odwracanie elementów w algebrze Hecke

8.1 Operacje T_i są odwracalne

$$T_i^2 = (q-1)T_i + q$$

$$T_i(T_i - (q-1)) = q$$

$$T_i^{-1} = \frac{1}{q}(T_i + (q-1))$$

•

$$T_y^{-1} = q^{-\ell(y)} \sum_{x \leq y} (\text{jakiś współczynnik}) T_x$$

• [Dheodhar] Podał interpretację współczynników. Niech

$$R_{x,y} = |ByB/B \cap B^-xB/B|$$

wtedy

$$T_{y^{-1}}^{-1} = q^{-\ell(y)} \sum_{x \leq y} (-1)^{\ell(y)-\ell(x)} R_{x,y}(q) T_x.$$

[Deodhar, Vinay V. On some geometric aspects of Bruhat orderings. I. A finer decomposition of Bruhat cells. Invent. Math. 79 (1985), no. 3, 499-511]

• Ponadto Deodhar podał rozkład zbioru $ByB/B \cap B^-xB/B$ na podzbiory postaci $\mathbb{F}_q^a \times (\mathbb{F}_q \setminus \{0\})^b$ zależny od danych kombinatorycznych.

• Przykład dla \mathbb{P}^1 , $\mathfrak{S}_2 = \{id, s\}$:

$$BidB/B = \{0\}, \quad BsB/B = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}, \quad B^-idB/B = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}, \quad B_sB/B = \{\infty\}.$$

$$R_{id,s}(q) = |(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \cap (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\})| = q-1, \quad R_{s,s}(q) = |(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \cap \{\infty\}| = 1.$$

8.2 Przykład : $n = 3$, $y = w_0 = s_1 s_2 s_1$ (najdłuższa permutacja), $x = id$.

• $Bw_0B/B = X_{w_0}$ otwarta komórka z centrum w $[w_0]$, zdefiniowana przez warunki transwersalności względem standardowej flagi

$$\{V_1 \subset V_2 \mid V_1 \pitchfork \text{lin}(e_1, e_2), \quad V_2 \pitchfork \text{lin}(e_1)\}$$

• $B^-idB/B = X^{id}$ otwarta komórka w centrum w $[id]$, zdefiniowana przez warunki transwersalności względem przeciwnej flagi

$$\{V_1 \subset V_2 \mid V_1 \pitchfork \text{lin}(e_2, e_3), \quad V_2 \pitchfork \text{lin}(e_3)\}.$$

To jest otoczenie afiniczne $[id]$ w $GL_3(\mathbb{F}_q)/B$, jest sparametryzowane przez grupę macierzy dolnotrójkątnych z 1 na przekątnej

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \quad V_1 = \text{lin}((1, a, b)), \quad V_2 = \text{lin}((1, a, b), (0, 1, c))$$

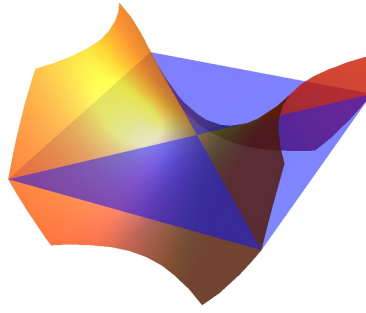
• $X_{w_0} \cap X^{id}$: trzeba usunąć hiperpowierzchnie (dywizory Schuberta)

$$X_1 = \{(V_1 \subset V_2) \in Fl_3 : \dim(V_1 \cap \text{lin}(e_1, e_2)) > 0\},$$

$$X_2 = \{(V_1 \subset V_2) \in Fl_3 : \dim(V_2 \cap \text{lin}(e_1)) > 0\},$$

We współrzędnych na X^{id}

$$X_1 \cap X^{id} = \{b = 0\}, \quad X_2 \cap X^{id} = \left\{ \det = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \right\} = \{ac - b = 0\}$$



- Dostajemy $|X^{id} \cap X_{w_0}| = q^3 - 2q^2 + 2q - 1$.
- Pełny wzór na odwrotność

$$T_{w_0}^{-1} = q^{-3} \left(- (q^3 - 2q^2 + 2q - 1) + (q^2 - 2q + 1)(T_{s_1} + T_{s_2}) - (q - 1)(T_{s_2 s_1} + T_{s_1 s_2}) + T_{w_0} \right)$$

Ćwiczenie: sprawdzić, czy się zgadza wzór Deodhara.

8.3 Uwaga: przecięcia przeciwnych rozmaitości Schuberta $\overline{X}_\sigma \cap \overline{X}^\tau$ nazywają się rozmaitościami Richardsona, wiadomo o nich bardzo dużo.

8.4 Przecięciami otwartych komórek zajmowali się między innymi [Shapiro, B.; Shapiro, M.; Vainshtein, A. Connected components in the intersection of two open opposite Schubert cells in $SL_n(\mathbb{R})/B$. Internat. Math. Res. Notices 1997, no. 10, 469-493]. Policzenie ilości składowych spójnych (nad \mathbb{R}) jest nietrywialnym zadaniem.

8.5 Liczenie punktów nad \mathbb{F}_q oraz rozszerzeniach tego ciała ma głębszy sens. Dla rozmaitości (schematu) X zdefiniowanego nad \mathbb{F}_q tworzymy funkcję zeta

$$Z_X(T) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{|X(\mathbb{F}_{q^n})|}{n} T^n \right)$$

- Dla $X = \mathbb{A}^k$ funkcja zeta jest łatwa

$$Z_{\mathbb{A}^k}(T) = \frac{1}{1 - q^k T}$$

- Niech U będzie zbiorem otwartym w X . Funkcja zeta spełnia

$$Z_X(T) = Z_U(T) Z_{X \setminus U}(T).$$

- Hipotezy Weila (udowodnione przez Grothendiecka i Deligne'a) orzekają, że funkcja zeta jest wymierna i opisują związek zer i biegunów z kohomologiami rozmaitości $X(\mathbb{C})$ (jeśli np X było zdefiniowane nad \mathbb{Z}). Patrz: Fulton, Introduction to toric varieties, str. 94 (patrz też cały §4.5).

8.6 Uniwersalna charakterystyka Eulera: dla ciała k rozważamy formalny obiekt $K(Var/k)$ generowany przez klasy izomorfizmu rozmaitości $[X]$ i spełniające relacje

$$[X] = [U] + [X \setminus U].$$

- Jeśli charakterystyka ciała jest 0, każdą rozmaitość można zdominować przez gładką rozmaitość, tzn mamy rozwiązanie osobliwości $\tilde{X} \rightarrow X$, ponadto każdą rozmaitość można zanurzyć w rozmaitość zupełną. Zatem rozumując indukcyjnie ze względu na wymiar można wykazać, że $K(Var/k)$ jest generowane przez klasy $[X]$ dla X zupełnych i gładkich (można nawet ograniczyć się do X rzutowych). Dzięki twierdzeniu o słabej faktoryzacji [AKMW] F. Bittner udowodniła, że wszystkie relacje w $K(Var/k)$ są generowane przez relację blow-upu: niech X będzie gładką rzutową rozmaitością i niech $C \subset X$ będzie

gładką podrozmainością, $Blow_C X$, rozdmuchaniem w C , a $E \subset Blow_C X$, dywizorem wyjątkowym. Wtedy

$$[Blow_C X] - [E] = [X] - [C].$$

[Bi] Bittner, Franziska, The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero. *Compos. Math.* 140 (2004), no. 4, 1011-1032.

[AKMW] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki and J. Włodarczyk, Torification and factorization of birational maps, *J. Amer. Math. Soc.* 15 (2002), 531-572

8.7 Z rezultatów Deodhara wynika, że $[ByB/B \cap B^-xB/B] \in \mathbb{Z}[\mathbb{A}^1] \subset K(Var/\mathbb{F}^q)$.

Powrót do teorii reprezentacji:

8.8 Istnieje odpowiedniość pomiędzy reprezentacjami \mathfrak{S}_n a \mathcal{H}_n . Na razie tego nie dowodzimy, ale sprawdźmy co się dzieje dla reprezentacji 1-wymiarowych:

- Przypuśćmy, że $\dim V = 1$, $T_i(v) = a_i v$.
- Mamy inny sposób zapisania relacji kwadratowej

$$(T_i + 1)(T_i - q) = 0,$$

więc skalar a_i musi spełniać tożsamość $(a_i + 1)(a_i - q) = 0$.

- Z relacji warkoczowej wynika, że $a_i = a_j$. Stąd mamy dwie reprezentacje: $T_i \mapsto -id$ i $T_i \mapsto q$, będące deformacjami reprezentacji *sgn* i *triv*.
- **Ćwiczenie:** Czy istnieją nieprzywiedlne reprezentacje \mathcal{H}_n dla $n > 3$?

9 Jeszcze o geometrii – rozwiązanie Botta-Samelsona. Reprezentacje grupy permutacji \mathfrak{S}_n

9.1 Podział na zbiory postaci $k^2 \times (k \setminus \{0\})^b$ wg Deodhara:

9.2 Załóżmy, że $\underline{w} = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_\ell}$ jest zredukowanym przedstawieniem $w \in \mathfrak{S}_n$ za pomocą elemntarnych transpozycji.

- Rozmaitość Schubertość Schuberta naogół jest osobliwa. Mając zredukowane przedstawienie można skonstruować rozwiązanie osobliwosci $p_{\underline{w}} : Z_{\underline{w}} \rightarrow X_w$:
 - $Z_{\underline{w}}$ jest gładką zupełną rozmaitością, $\partial Z_{\underline{w}} = p_{\underline{w}}^{-1}(X_w \setminus X_w^o)$ jest dywizorem z prostymi normalnymi przecięciami (SNC, tzn lokalnie w pewnych współrzędnych zadane równaniem $\prod_{i=1}^k x_i = 0$).
 - $p_{\underline{w}} : Z_{\underline{w}}^o = Z_{\underline{w}} \setminus \partial Z_{\underline{w}} \rightarrow X_w^o$ jest izomorfizmem.
- Konstrukcja [Brion-Kumar, Frobenius Splitting Methods in Geometry and Representation Theory, roz 2.2]

$$Z_{\underline{w}} = P_{i_1} \times_B P_{i_2} \times_B \dots \times_B P_{i_\ell} / B$$

z naturalnym odwzorowaniem do G/B Punkt $[s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_\ell}]$ jest odwzorowany na w .

— Indukcyjnie: $p_{\underline{w}s_i} : Z_{\underline{w}s_i} \rightarrow G/B$ otrzymujemy przez pull-back

$$\mathbb{P}^1\text{-wiązka} \quad \begin{array}{ccc} Z_{\underline{w}s_i} & \xrightarrow{p_{\underline{w}s_i}} & G/B \\ \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ Z_{\underline{w}} & \xrightarrow{\pi_i \circ p_{\underline{w}}} & G/P \end{array}$$

Ponadto wiązka $Z_{\underline{w}s_i} \rightarrow Z_{\underline{w}}$ ma przekrój (na ostatnim miejscu wpisujemy 1).

9.3 Przykład $w = (1, 3) = s_1 s_2 s_1$. Komórka otwarta jest postaci $BwB/B = Nw/B$, gdzie N składa się z macierzy górnotrójkątnych z 1 na przekątnej. Parametryzacja X_w^o :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} b & a & 1 \\ c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Lepsza parametryzacja

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+ac & a & 1 \\ c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- W otoczeniu punktu $[id]$ dywizor brzegowy nie jest SNC. Odwzorowanie z Z_w w otwartej mapie wygląda tak:

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+c & 1 & 0 \\ bc & b & 1 \end{pmatrix}$$

- Dywizor ∂Z_w^o we współrzędnych $\{bc = 0\} \cup \{ab = 0\}$.
- Uwaga punkty postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ \bullet & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \neq 0$$

nie są w obrazie tej mapy, ale trzeba wziąć inną mapę. Mapy są indeksowane podslowami. Powyższa mapa odpowiada pustemu słowu, a pierwsza mapa odpowiadała pełnemu słowu. Weźmy mapę odpowiadającą podslowu $\boxed{s_1} s_2 \boxed{s_1}$.

$$(**) \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+1 & a & 0 \\ c & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dla } a = 0$$

- Rozkład Deodhara:

$$\{a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0\}_{z \text{ mapy } (*)} \sqcup \{a = 0, b \neq 0\}_{z \text{ mapy } (**)} \simeq (k \setminus \{0\})^3 \sqcup k \times (k \setminus \{0\})$$

9.4 Diagram Younga $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0$ (pomijamy zera)

- $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$

9.5 Diagram \rightsquigarrow podgrupy: P_λ permutacje w rzędach, Q_λ permutacje w kolumnach

— Jeśli $\lambda = 1^n$, tzn jedna kolumna, to $P_\lambda = 1$, $Q_\lambda = \mathfrak{S}_n$

— Jeśli $\lambda = n$, tzn jeden wiersz, to $P_\lambda = \mathfrak{S}_n$, $Q_\lambda = 1$

- Jeśli $|\lambda| = n$, definiujemy a_n, b_n, c_n symetryzatory Younga

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in P_\lambda} \sigma, \quad b_\lambda = \sum_{\sigma \in Q_\lambda} \text{sgn}(\sigma) \sigma,$$

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda.$$

- Dla $\lambda = (3, 1)$

$$\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \sigma \right) (1 - \tau_{1,4})$$

9.6 Twierdzenie: załóżmy $|\lambda| = |\mu| = n$:

- $V_\lambda = \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)c_\lambda \subset \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną (nad każdym rozszerzeniem \mathbb{Q} też),

•

$$c_\lambda^2 = k_\lambda c_\lambda, \quad c_\lambda c_\mu = 0 \text{ dla } \lambda \neq \mu$$

gdzie $k_\lambda = \frac{n!}{\dim V_\lambda}$

- Wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje są tej postaci, $V_\lambda \not\cong V_\mu$ dla $\lambda \neq \mu$.

9.7 Przykłady

- Dla $\lambda = n$ symetryzator $c_\lambda = a_\lambda = \sum_\sigma \sigma$, $V_\lambda = \text{triv}_{\mathfrak{S}_n}$
- Dla $\lambda = 1^n$ symetryzator $c_\lambda = b_\lambda = \sum_\sigma \sigma$, $V_\lambda = \text{sgn}$
- Dla $\lambda = (n-1, 1)$

$$c_\lambda = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \sigma \right) (1 - \tau_{1,n})$$

$V_\lambda =$ nietrywialny składnik w reprezentacji permutacyjnej:

Dowód: zauważmy, że $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \text{triv}_{\mathfrak{S}_{n-1}}$ jest reprezentacją permutacyjną. Prosta lin c_λ niezmiennicza ze względu na $P_\lambda = \mathfrak{S}_{n-1}$, zatem istnieje morfizm $\text{triv}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \rightarrow \text{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n-1}} \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)c_\lambda$. Przez dołączenie mamy morfizm

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \text{triv}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \rightarrow \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)c_\lambda,$$

który jest epimorfizmem, więc musi być izomorficzny ze składnikiem prostym $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \text{triv}_{\mathfrak{S}_{n-1}}$.

9.8 Formuła Frobeniusa opisująca charakter V_λ .

- Niech $k \geq$ ilość rzędów w λ . Wykorzystujemy funkcje symetryczne zmiennych $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$

$$P_j(x) = \sum_{i=1}^k x_i^j$$

- podział $\lambda \rightsquigarrow$ ciąg malejący $\ell_i = \lambda_i + k - i$
- Dana klasa sprzężoności w $C_J = \mathfrak{S}_n$ składająca się z cykli długości $J = (j_1, j_2, \dots, j_r)$, np $id \in C_{1,1,\dots,1}$, transpozycja $\tau \in C_{2,1,1,\dots,1}$
- Formuła: Konstruujemy wielomian, którego współczynnik przy $x^{\ell_1} x^{\ell_2} \dots x^{\ell_k}$ jest równy wartości charakteru

$$\chi_\lambda(C_J) = \left[\Delta(x) \prod_{a=1}^r P_{j_a}(x) \right]_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k}$$

gdzie $\Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$

9.9 Przykład: n dowolne, $\lambda = (n)$ (reprezentacja trywialna), $k = 1$, $\Delta = 1$, wielomian

$$1 \cdot \prod_{a=1}^r P_{j_a}(x) = \prod_{a=1}^r x_1^{j_a} = x_1^n$$

ma tylko jeden współczynnik równy 1.

9.10 Przykład $J = (1, 4)$, $k = 2$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^4 + x_2^4) = x_1^6 - x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 - x_2^6$$

Jedyne niezerowe wartości charakteru

$$\ell = (6, 0) \iff \lambda = (5, 0) \rightsquigarrow \chi_\lambda(C_J) = 1$$

$$\ell = (4, 2) \iff \lambda = (3, 1) \rightsquigarrow \chi_\lambda(C_J) = -1$$

9.11 Przykład $J = (2, 3)$, $k = 2$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)(x_1^3 + x_2^3) = x_1^6 - x_2x_1^5 + x_2^2x_1^4 - x_2^4x_1^2 + x_2^5x_1 - x_2^6$$

Jedyne niezerowe wartości charakteru

$$\begin{aligned} \ell = (6, 0) &\iff \lambda = (5, 0) \rightsquigarrow \chi_\lambda(C_J) = 1 \\ \ell = (5, 1) &\iff \lambda = (4, 1) \rightsquigarrow \chi_\lambda(C_J) = -1 \\ \ell = (4, 2) &\iff \lambda = (3, 2) \rightsquigarrow \chi_\lambda(C_J) = 1 \end{aligned}$$

9.12 Przykład: $n = 3$, $J = (1, 1, 1)$ (tzn klasa sprzężoności identyczności) $k = 3$, wielomian

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_2 + x_3)^3 = (x_2x_1^2 - x_3x_1^2 - x_2^2x_1 + x_3^2x_1 - x_2x_3^2 + x_2^2x_3)(x_1 + x_2 + x_3)^3$$

- Dla $\lambda = (2, 1)$ tzn $\ell = (4, 2, 0)$ patrzymy na współczynnik przy $x_1^4x_2^2$. Możemy położyć $x_3 = 0$

$$(x_1 - x_2)x_1x_2(x_1 + x_2)^3$$

(możliśmy od razu wziąć $k = 2$).

Znajdujemy współczynnik przy $x_1^3x_2$ w $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^3 = (x_1^2 - x_2^2)(x_1 + x_2)^2$. Odp=2.

- Jeśli $\lambda = (1, 1, 1)$ (tzn $V_\lambda = \text{sgn}$) to znajdujemy współczynnik przy $x_1^3x_2^2x_3$, który powinien wyjść 1.

9.13 Skoro $\dim V_\lambda = \chi_\lambda(1)$, to mamy (dość niewygodną) formułę:

$$\dim V_\lambda = \left[\Delta(x)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n \right]_{\prod x_i^{\ell_i}}$$

9.14 Formuła haków (hook formula)

$$\dim V_\lambda = \frac{d!}{\prod(\text{długość haków})}$$

[Fulton-Harris, Formuła 4.12 str 50]

9.15 Dla $\lambda = (2, 2)$

$$\begin{aligned} 4! / (3 * 2 * 2 * 1) &= 2 \\ &= [(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^4]_{x_1^3x_2^2} \end{aligned}$$

9.16 Przykład $\lambda = (k, 1^{n-k})$ sama jest hakiem.

$$\prod(\text{długość haków}) = n(k-1)!(n-k)!, \quad \dim V_\lambda = \binom{n-1}{k-1}$$

- Uwaga $V_\lambda = \Lambda^{k-1}V_{2,1^{n-1}}$

10 Dowody twierdzeń o reprezentacjach \mathfrak{S}_n

Dowody [Gruson-Serganova roz 6, Fulton-Harris §4.]

10.1 Dowód postaci reprezentacji nieprzywiedlnych.

- Ilość diagramów Younga o n pudełkach jest równa ilości klas sprzężoności w \mathfrak{S}_n , wystarczy pokazać, że reprezentacje V_λ są parami nie mające wspólnych składników.

10.2 Zdefiniowaliśmy V_λ dla standardowego wypełnienia (ponumerowania pudełek) λ . W ogólności dla każdego wypełnienia dostajemy $V_{w(\lambda)} \subset \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$, naogół różne od V_λ , ale izomorficzne.

10.3 Dla $p \in P_\lambda, q \in Q_\lambda$

$$p c_\lambda q = \text{sgn}(q) c_\lambda$$

• Lemat: Jeśli

$$p x q = \text{sgn}(q) x,$$

to $x = \text{const } c_\lambda$.

Dow: Niech T będzie zbiorem reprezentantów $P_\lambda \backslash \mathfrak{S}_n / Q_\lambda$. Element x może być zapisany jednoznacznie w postaci

$$\sum_{w \in T} d_s \sum_{p \in P_\lambda, q \in Q_\lambda} \text{sgn}(q) p w q = \sum_{s \in T} d_s a_\lambda w b_\lambda$$

Pokażemy, że jeśli $w \notin P_\lambda Q_\lambda$, to $a_\lambda w b_\lambda = 0$.

Równoważnie $a_\lambda w b_\lambda w^{-1} = 0$. Antsymetryzator $w b_\lambda w^{-1} = b_{w(\lambda)}$ odpowiada innemu ponumerowaniu pudełek. Twierdzimy, że istnieje transpozycja $\tau \in P_\lambda \cap Q_{w(\lambda)}$, tzn $\{i, j\}$ należą w jednym rzędzie λ i jednej kolumnie $w(\lambda)$.

• Wniosek $c_\lambda \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_\lambda) c_\lambda \subset \mathbb{Q} c_\lambda$.

10.4 Twierdzenia V_λ jest nieprzywiedlna.

Dow: Niech $W \subset V_\lambda$ podreprezentacja. Wtedy albo:

— $c_\lambda W = \mathbb{Q} c_\lambda$

wtedy $\mathbb{Q}(\mathfrak{S}_\lambda) c_\lambda W = \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_\lambda) c_\lambda$, więc $W = \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_\lambda) c_\lambda = V_\lambda$

— $c_\lambda W = 0$

$W \cdot W = 0$, ale reprezentacja $\mathbb{Q}(\mathfrak{S}_\lambda)$ jest półprosta, więc istnieje idempotent π , rzutowanie na W ; jeśli $\pi^2 = 0$, to $\pi = 0$, więc $W = 0$.

10.5 $c_\lambda = \alpha \pi_\lambda$, gdzie π_λ jest rzutowaniem na V_λ , a c_λ jest utożsamione z działaniem $x \mapsto x c_\lambda$.

• $\text{tr}(\pi_\lambda) = \dim V_\lambda, \text{tr}(c_\lambda) = n!$ (jedynie $1 \in P_\lambda Q_\lambda$ ma niezerowy ślad), więc $\alpha = n! / \dim V_\lambda$. Stąd

$$c_\lambda^2 = (n! / \dim V_\lambda)^2 \pi_\lambda^2 = (n! / \dim V_\lambda)^2 \pi_\lambda = (n! / \dim V_\lambda) c_\lambda$$

10.6 Jeśli $\lambda \neq \mu$ to $V_\lambda \not\cong V_\mu$.

• można założyć, że $\lambda < \mu$ w porządku leksykograficznym, istnieje $\{i, j\}$ takie, że należą do jednego rzędu λ i jednej kolumny $w(\mu)$. Wtedy $c_\lambda c_{w(\mu)} = c_\lambda \tau_{i,j}^2 c_{w(\mu)} = -c_\lambda c_{w(\mu)}$.

• dla każdego w mamy $c_\lambda c_{w(\mu)} = 0$, a więc i $c_\lambda x c_{w(\mu)} = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n)$, czyli c_λ działa zerowo na $V_{t(\mu)}$. Ale c_λ nie działa zerowo na c_λ .

Dowód formuły Frobeniusa

10.7 Ustalamy $k \geq$ długość λ . Niech C_I klasa sprzężoności, $I = (1^{i_1}, 2^{i_2}, \dots, n^{i_n}, \sum_{a=1}^n i_a a = n$.

— $\Delta = \prod_{i < j} x_i - x_j = x_1^{k-1} x_2^{k-2} \dots x_k^0 + \text{antsym} = \pm$ wyznacznik Vandermonde'a

— $P_I = \prod_{a=1}^n (P_a)^{i_a}$

Mamy dowieść, że $\chi_{V_\lambda}(C_I) = [\Delta P_I]_{\lambda+\rho}$, gdzie $\rho = (k-1, k-2, \dots, 0)$ oraz $[W]_\mu$ oznacza odpowiedni współczynnik w wielomianie W .

10.8 Najpierw rozważymy reprezentację, której charakter jest opisany przez P_I .

• Niech $U_\lambda = \mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n) a_\lambda$. Reprezentacja U_λ zawiera V_λ bo mamy epimorfizm $U_\lambda \rightarrow V_\lambda$ (mnożenie przez b_λ z prawej strony).

• $U_\lambda = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \text{triv}_{\mathfrak{S}_\lambda}$.

• Lemat [Fulton-Harris str 55] Charakter reprezentacji U_λ jest opisany przez współczynniki funkcji P_I

$$\chi_{U_\lambda}(C_I) = [P_I]_\lambda.$$

Dowodzimy stosując wzór

$$\chi_{\text{Ind}_H^G \text{triv}_H}(C) = \frac{1}{|C|} (G : H) \cdot |C \cap H|$$

$$|C| = \frac{|G|}{|\text{Centralizator}(g)|}, \quad \text{gdzie } g \in C.$$

Dowód polega na elementarnym liczeniu elementów centralizatora, szczegóły w Fultonie-Harrisie.

10.9 Uniwersalny związek pomiędzy współczynnikami P (funkcja symetryczna) a ΔP (funkcja antysymetryczna)

$$[P]_\lambda = [\Delta P]_{\lambda+\rho} + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu,\lambda} [\Delta P]_{\mu+\rho}$$

($K_{\mu,\lambda}$ liczby Kostki, patrz dodatek A do Fultona-Harrisa.)

10.10 Relacje prostopadłości: charaktery

$$\omega_\lambda : C_I \mapsto [\Delta P_I]_{\lambda+\rho}$$

są ortogonalne, tzn

$$\frac{1}{n!} \sum_I |C_I| \omega_\lambda(C_I) \omega_\mu(C_I) = \delta_{\lambda,\mu}$$

(Ten fakt wynika z teorii funkcji symetrycznych i nie będę dowodził.)

10.11 Twierdzenie (Frobeniusa) $\chi_{V_\lambda} = \omega_\lambda$.

• Ponieważ ω_λ jest \mathbb{Z} -kombinacją charakterów χ_{U_λ} oraz $(\omega_\lambda, \omega_\lambda) = 1$ więc $\pm\omega_\lambda$ jest charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej. Dowodzimy indukcyjnie (w dół, ze względu na porządek leksykograficzny diagramów Younga), że $\omega_\lambda = \chi_{V_\lambda}$ poczynając od $\lambda = (n)$. Wtedy $V_\lambda = \text{triv}_{\mathfrak{S}_n}$. Bierzemy dowolne k (potrzebne ze względu na indukcję)

$$[\Delta P_I]_{(n)+\rho} = [(x^\rho \pm \dots) \prod_{a=1}^n (x_1^a + \dots)^{i_a}]_{(n)+\rho} = 1$$

• Następnym krokiem w indukcji jest $\lambda = (n-1, 1)$. Wtedy

$$U_\lambda = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \text{triv}_{\mathfrak{S}_{n-1}} = V_{(n-1,1)} \oplus \text{triv}_{\mathfrak{S}_n}$$

oraz

$$[P_I]_{(n-1,1)} = [\Delta P_I]_{(n-1,1)+\rho} + [\Delta P_I]_{(n)+\rho} = \omega_{(n-1,1)}(C_I) + \omega_{(n)}(C_I).$$

10.12 Wszegobecność diagramów Younga

- Klasy sprzężoności w \mathfrak{S}_n (t.ż. $|\lambda| = n$)
- Reprezentacje \mathfrak{S}_n , tjw.
- Reprezentacje SL_k lub wielomianowe GL_k , tzn rozszerzające się do funkcji wielomianowej $\text{End}(\mathbb{C}^k) \rightarrow \text{End}(V)$. Warunek na λ : długość(λ) $\leq k$, tzn $\lambda_i = 0$ dla $i > k$
- Baza funkcji symetrycznych $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k]^{\mathfrak{S}_k}$, t.j.w.
 - baza jednomianowa
 - baza funkcji Schura $S_\lambda = \frac{\Delta_{\lambda+\rho}}{\Delta_\rho}$ = charakter reprezentacji nieprzywiedlnej GL_k obcięty do torusa $(\mathbb{C}^*)^k$ (patrz Weyl Character Formula)
- Baza funkcji antysymetrycznych $\Delta_{\lambda+\rho} = \det(\{x_i^{\lambda_j+k-j}\}_{i,j})$, oczywiście $\Delta_\rho = \Delta = \pm \text{Vandermonde}$.
- Ekwiwariantne wiązki globalnie generowane nad L_λ nad przestrzenią GL_k/B , patrz Borel-Weil-Bott Theorem: $H^0(\text{GL}_k/B; L_\lambda)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną GL_k z najwyższą wagą λ (długość(λ) $\leq k$).
- Indeksowanie klatek Schuberta w grassmanianie $Gr_k(k^n)$ (długość(λ) $\leq k$ oraz $\lambda_1 \leq n-k$)
- Baza $H^*(Gr_k(\mathbb{C}^n))$ (λ tjw.)

10.13 Uwaga: diagramy Younga można mnożyć (bo np funkcje symetryczne można mnożyć, reprezentacje GL_k tensorować, klasy kohomologii można cupować). Co to znaczy dla reprezentacji \mathfrak{S}_\bullet

$$\text{Rep}(\mathfrak{S}_n) \times \text{Rep}(\mathfrak{S}_m) \rightarrow \text{Rep}(\mathfrak{S}_{n+m})?$$

11 Konstrukcja Weila i dualność / funktory Schura

11.1 Ogólny fakt: [FuHa §6] Niech $A = \mathbb{C}(\mathfrak{S}_n)$, $B = \text{End}(W)$. Iloczyn tensorowy $W^{\otimes n}$ jest (B, A) -bimodem (B działa z lewej, A z prawej). Wtedy, dla podziału λ definiujemy

$$\mathbb{S}_\lambda(W) := W^{\otimes n} \otimes_A V_\lambda = W^{\otimes n} \otimes_A A c_\lambda \simeq (W^{\otimes n})_{c_\lambda} \subset W^{\otimes n}$$

Dostajemy B nieprzywiedlny moduł.

- Mamy rozkład (B, A) -bimodułu

$$W^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{|\lambda|=n, \text{dl}(\lambda) \leq \dim W} \mathbb{S}_\lambda(W) \otimes V_\lambda$$

11.2 Dla różnych λ o długości $\leq \dim W$ otrzymujemy nieizomorficzne B -moduły.

- Jako reprezentacje $\text{GL}_m(\mathbb{C})$ one są nieizomorficzne.
- Wszystkie reprezentacje $\text{GL}_m(\mathbb{C})$ są postaci $\mathbb{S}_\lambda(W) \otimes (\Lambda^{\text{top}} W)^j$, $j \in \mathbb{Z}$
- Jako reprezentacje $\text{SL}_m(\mathbb{C})$ reprezentacje $\mathbb{S}_\lambda(W)$ i $\mathbb{S}_\mu(W)$ są izomorficzne tylko gdy $\lambda = \mu + (j^m)$ dla pewnego j .
- Przyporządkowanie $W \mapsto \mathbb{S}_\lambda(W)$ rozszerza się do funktora $\text{Vect}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}$.

11.3

$$W^{\otimes n} \supset (W^{\otimes n})_{a_\lambda} = \prod_{i=1}^m \text{Sym}^{\lambda_i} W \rightarrow (W^{\otimes n})_{a_\lambda b_\lambda} = \mathbb{S}_\lambda(W) \subset \prod \Lambda^{\mu_i} W$$

11.4 Konstrukcja bazy $\mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^n)$ poprzez dopuszczalne wypełnienia diagramu Younga $\lambda = \mu^\vee$

11.5

$$\mathbb{S}_n = \text{Sym}^n W, \quad \mathbb{S}_{1^n} \Lambda^n W$$

11.6 Przykład $n = 2$

$$W \otimes W = \text{Sym}^2 W \oplus \Lambda^2 W = \mathbb{S}_2 W \oplus \mathbb{S}_{(11)} W$$

11.7 Dla $n = 3$

$$W^{\otimes 3} = \text{Sym}^3 W \oplus (\mathbb{S}_{21} W)^2 \oplus \Lambda^3 W.$$

$$\mathbb{S}_{21} W = \text{obraz}(\text{Sym}^2 W \otimes W \rightarrow W \otimes \Lambda^2 W).$$

- Baza indeksowana tabelkami Younga (czyli wypełnionymi diagramami)

$$\begin{array}{cc} a & b \\ & c \end{array}$$

takimi, że $1 \leq a, b, c \leq m$, $a < c$, $a \leq b$.

11.8 Dla $m = 2$ podział λ jest postaci (λ_1, λ_2) .

$$\mathbb{S}_\lambda W = \text{obraz}(\text{Sym}^{\lambda_1} W \otimes \text{Sym}^{\lambda_2} W \rightarrow (\Lambda^2 W)^{\lambda_2} \otimes W^{\otimes(\lambda_1 - \lambda_2)}).$$

To przekształcenie jest suriekcją na $(\Lambda^2 W)^{\lambda_2} \otimes \text{Sym}^{\lambda_1 - \lambda_2} W$.

- Charakter $T \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$ jest równy $(x_1 x_2)^{\lambda_2} \sum_{k+\ell=\lambda_1-\lambda_2} x_1^k x_2^\ell$
- wektor najwyższej wagi $(e_1^{\lambda_1} \otimes e_2^{\lambda_2}) b_\lambda = (e_1 \wedge e_2)^{\lambda_2} \otimes e_1^{\lambda_1 - \lambda_2}$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & & & & & \end{array}$$

Wektory bazowe $(e_1 \wedge e_2)_2^\lambda \cdot e_1^k \cdot e_2^{\lambda_1 - \lambda_2 - k}$ dla $k = 0, \dots, \lambda_1 - \lambda_2$.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & & & & & & \end{array}$$

11.9 Charakter $\mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ obcięty do torusa maksymalnego $(\mathbb{C}^*)^m$ jest równy funkcji Schura $S_\lambda = \frac{\Delta_{\lambda+\rho}}{\Delta_\rho}$, gdzie $\Delta_{\lambda+\rho} = \det(\{x_i^{\lambda_j+m-j}\}_{i,j})$.

11.10 W języku teorii reprezentacji grup Lie $\mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ jest nieprzywiedlną reprezentacją SL_m o najwyższej wadze równej λ

11.11 Dowód nieprzywiedlności wynika z ogólnego faktu. Niech A będzie półprostym pierścieniem, U prawym A -modułem. Niech $\bar{B} := \text{End}_A(U)$. Jeśli V jest nieprzywiedlnym lewym A -modułem, to $U \otimes_A V$ jest nieprzywiedlnym \bar{B} modułem. (Nie trzeba zakładać, że U jest nieprzywiedlnym A -modułem.)

- W naszym przypadku $B = \text{End}(W)$, $\bar{B} = \text{End}_{\mathfrak{S}_n}(W^{\otimes n})$. Nie jest prawdą, że $B = \bar{B}$, ale obraz $B \rightarrow \text{End}(W^{\otimes n})$ rozpinają liniowo \bar{B} .
- bo $\text{End}(W^{\otimes n}) = \text{End}(W)^{\otimes n}$. **Ćwiczenie:** tensory proste $u^{\otimes n} \in Z^{\otimes n}$ rozpinają $(Z^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$.

11.12 Charakter reprezentacji $\mathbb{S}_\lambda(W)$ obcięty do torusa maksymalnego:

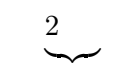
$$\sum_{\text{dopuszczalne wypełnienia } \lambda} \prod \text{waga pudełka}$$

- Twierdzenie: Charakter jest równy wielomianowi Schura

$$\chi_{\mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^m)} = S_\lambda(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

11.13 Przykład $\lambda = (2, 1)$, $\dim W = 3$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$



 najwyższa waga

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{S}_{2,1}(\mathbb{C}^3)} &= t_1^2 t_2 + t_1^2 t_3 + t_1 t_2^2 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_3^2 + t_2^2 t_3 + t_2 t_3^2 = \\ &= (t_1 + t_2)(t_1 + t_3)(t_2 + t_3) = S_{2,1}(t_1, t_2, t_3) \end{aligned}$$

- Reprezentacja $\mathbb{S}_{2,1}(\mathbb{C}^3)$ (obcięta do SL_3) jest reprezentacją dołączoną \mathfrak{sl}_3 .

11.14 Niech $G = GL_m(\mathbb{C})$. Zdefiniujemy wiązkę liniową nad przestrzenią flag $Fl(m) = GL_m(\mathbb{C})/B$. Niech λ będzie podziałem o długości $\leq m$. Torus działa na \mathbb{C} poprzez charakter $t^\lambda = \prod_{i=1}^m t_i^{-\lambda_i}$. Taką reprezentację oznaczamy $\mathbb{C}_{-\lambda}$. Grupa Borela działa na \mathbb{C}_λ poprzez epimorfizm $B \rightarrow T$. Definiujemy wiązkę $\mathcal{L}_\lambda = G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda}$. Łatwo sprawdzamy, że ta wiązka jest globalnie generowana (tzn generowana przez przekroje holomorficzne). Ze znanych własności przestrzeni jednorodnych wiemy, że $H^k(G/B; \mathcal{L}_\lambda) = 0$ dla $k > 0$. Zatem $\chi(G/B; \mathcal{L}_\lambda) = H^0(G/B; \mathcal{L}_\lambda)$.

- Twierdzenie Borela-Weila-Botta: $H^0(G/B; \mathcal{L}_\lambda)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną $GL_m(\mathbb{C})$. [Fulton-Harris, p.392-394]
- Obliczymy charakter tej reprezentacji z twierdzenia o lokalizacji [Chriss-Ginzburg, Representation Theory and Complex Geometry, tw 5.11.7]

$$\chi(G/B; \mathcal{L}_\lambda) = \sum_{p \in (G/B)^T} \frac{\chi \mathcal{L}_{\lambda,p}}{\chi(\Lambda_{-1} T_p^* G/B)},$$

gdzie $\Lambda_{-1} E = \sum_{k=0}^{\dim E} (-1)^k \Lambda^k E$ jest alternującą sumą potęg zewnętrznych. To jest wirtualna reprezentacja spełniająca $\Lambda_{-1}(E) = \prod_i (1 - L_i)$ gdy E jest sumą prostą reprezentacji 1-wymiarowych L_i . Liczymy składnik dla $p = B/B \in G/B$

$$(*) = \frac{t^{-\lambda}}{\prod_{i < j} (1 - \frac{t_i}{t_j})}$$

Zamieniamy zmienne $t_i := t_i^{-1}$

$$(*) = \frac{t^\lambda}{\prod_{i < j} (1 - \frac{t_j}{t_i})} = \frac{t^{\lambda+\rho}}{\prod_{i < j} (t_i - t_j)}$$

Dalej symetryzujemy ten składnik i dostajemy dokładnie $S_\lambda(t_1, t_2, \dots, t_m)$

11.15 Zadanie z ćwiczeń: $\mathbb{C}(\mathfrak{S}_n)b_\lambda a_\lambda \simeq \mathbb{C}(\mathfrak{S}_n)a_\lambda b_\lambda$

Wystarczy pokazać, że istnieje niezerowe przekształcenie $\mathbb{C}(\mathfrak{S}_n)b_\lambda a_\lambda \rightarrow \mathbb{C}(\mathfrak{S}_n)a_\lambda b_\lambda$

$$wb_\lambda a_\lambda \mapsto wb_\lambda a_\lambda b_\lambda = wb_\lambda c_\lambda$$

To przekształcenie jest niezerowe, bo dla $w = a_\lambda$

$$a_\lambda b_\lambda a_\lambda \mapsto a_\lambda b_\lambda a_\lambda b_\lambda = c_\lambda^2 = \text{const } c_\lambda.$$

12 Mnożenie

12.1 Mamy strukturę mnożenia

- Reprezentacje GL_n możemy tensorować $R(GL_n) \times R(GL_n) \rightarrow R(GL_n)$
- Reprezentacje \mathfrak{S}_\bullet możemy indukować $R(\mathfrak{S}_n) \times R(\mathfrak{S}_m) \rightarrow R(\mathfrak{S}_{n+m})$
- Funkcje symetryczne możemy (zwyczajnie) mnożyć; $\mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]^{\mathfrak{S}_n}$ jest pierścieniem.
- Klasy Schuberta w $H^*(Gr_n(\mathbb{C}^N))$ możemy \cup -ować.
- Mamy wyróżnione klasy charakterystyczne wiązek wektorowych $S_\lambda(E)$ (wielomiany od klas Cherna), które można mnożyć w kohomologiach bazy wiązki E .

Wyjaśnienie o klasach charakterystycznych

12.2 $\lim_{N \rightarrow \infty} H^*(Gr_n(\mathbb{C}^N)) = H^*(Gr_n(\mathbb{C}^\infty)) \simeq \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_n]$, zatem funkcje symetryczne możemy utożsamiać z kohomologiami grassmanianu.

12.3 [Abstract Nonsense] Lemat Yonedy: Niech $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ będzie funktorem, $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Transformacje naturalne z funktora reprezentowalnego

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, B) \rightarrow F(-)$$

są w bijekcji z $F(B)$.

- Stosujemy Lemat Yonedy w sytuacji, gdy $\mathcal{C} = \text{hTop}$, $B = Gr_n(\mathbb{C}^\infty)$. Tu B reprezentuje functor $\text{Vect}_n(X)$ = klasy izomorfizmu wiązek wektorowych wymiaru n nad X^1 . Transformacje naturalne

$$\text{Vect}_n(-) \rightarrow H^*(-)$$

są w bijekcji z $H^*(Gr_n(\mathbb{C}^\infty))$.

- Można mówić o klasie Schura $S_\lambda(E)$ dla $E \in \text{Vect}_n(X)$. Ponadto definicja rozszerza się na wirtualne wiązki. To są wyróżnione klasy charakterystyczne. Np $S_{1^k}(V) = c_k(V)$, $S_k(V) = s_k(V)$, klasa Segre.
- Klasy charakterystyczne można mnożyć.

12.4 Twierdzenie: mnożenie w powyższych strukturach, w bazach indeksowanych przez λ podlegają tym samym prawom.

12.5 Wykażemy:

- 1) Zgodność mnożenia $R(GL_n)$ z $R(\mathfrak{S}_\bullet)$
- 2) Zgodność mnożenia $R(GL(\mathbb{C}^n))$ z $\mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]^{\mathfrak{S}_n}$ wynika z własności charakterów
- 3) Wzór na funkcję Schura $S_\lambda = \chi_{\mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^n)}$ za pomocą pełnych funkcji symetrycznych h_i
- 4) Wzór na klasy fundamentalne klatek w $Gr^n(V)$ za pomocą klas Segre (formuła Giambeli), z której wynika, że przy epimorfizmie

$$\mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_n] \rightarrow H^*(Gr^n(V)), \quad e_k \mapsto c_k(\text{wiązka tautologiczna})$$

wielomiany Schura odwzorowują się na klasy rozmaitości Schuberta.

¹Drobne nadużycie: X musi być zwartym CW-kompleksem.

12.6 Dowód 1) Niech $A_n = \mathbb{C}(\mathfrak{S}_n)$. Dla reprezentacji grup liniowych:

$$\mathbb{S}_\lambda(W) \otimes \mathbb{S}_\mu(W) = W^{\otimes n} c_\lambda \otimes W^{\otimes m} c_\mu = W^{\otimes(n+m)} c_\lambda c_\mu = W^{\otimes(n+m)} \otimes_{A_{n+m}} A_{n+m} c_\lambda c_\mu$$

Dla reprezentacji grup permutacji:

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (V_\lambda \otimes V_\mu) = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (A_n c_\lambda \otimes A_m c_\mu) = A_{n+m} c_\lambda c_\mu$$

• Jeśli

$$A_{n+m} c_\lambda c_\mu \simeq \bigoplus_{\nu} c_{\lambda, \mu}^{\nu} V_{\nu}.$$

to

$$\mathbb{S}_\lambda(W) \otimes \mathbb{S}_\mu(W) \simeq W^{\otimes(n+m)} \otimes_{A_{n+m}} \left(\bigoplus_{\nu} c_{\lambda, \mu}^{\nu} V_{\nu} \right) = \bigoplus_{\nu} c_{\lambda, \mu}^{\nu} \mathbb{S}_{\nu}(W)$$

Zatem problem w obu przypadkach sprowadza się do znalezienia rozkładu $A c_\lambda c_\mu$ jako sumy V_{ν} .

12.7 Przykład $\lambda = (1), \mu = (1) \quad c_\lambda = 1 \quad c_\mu = 1$

$$c_\lambda c_\mu = 1 = ((1 + s_1) + (1 - s_1))/2 = (c_{(2)} + c_{(1,1)})/2$$

12.8 Przykład $\lambda = (2), \mu = (1) \quad c_\lambda = 2 \quad c_\mu = 1, \quad V_2 \otimes V_1 = \text{triv}_{\mathfrak{S}_2}$, reprezentacja indukowana ma wymiar 3. Zawiera składnik trywialny, i jest podreprezentacją

$$A_3 \simeq V_3 \oplus V_{2,1}^2 \oplus V_{1^3},$$

za zatem jest izomorficzna z $V_3 \oplus V_{2,1}$. (To jest reprezentacja naturalna.)

12.9 Przykład $\lambda = (2, 1)$ (składnik w reprezentacji naturalnej), $\mu = (1)$

$$A_4 \simeq V_4 \oplus V_{3,1}^3 \oplus V_{2,1,1}^3 \oplus V_{1^4} \oplus V_{2,2}^2$$

$$\dim \text{Ind}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{S}_4} S_{2,1} = 4 \cdot 2 = 8$$

Ta reprezentacja zawiera $V_{3,1}$ oraz $V_{2,1,1}$, to co zostaje jest wymiaru 2, izo z $V_{2,2}$.

12.10 Krotność V_{ν} w $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (V_\lambda \otimes V_\mu)$ jest równa

$$\dim \text{Hom}_{\mathfrak{S}_{n+m}} (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (V_\lambda \otimes V_\mu), V_{\nu}) = \dim \text{Hom}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m} (V_\lambda \otimes V_\mu, V_{\nu})$$

czyli krotności $V_\lambda \otimes V_\mu$ w $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n+m}}^{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m} V_{\nu}$.

12.11 Łatwiej jest badać $\mathbb{S}_\lambda(W)$, lub jeszcze lepiej — wielomiany symetryczne S_λ . Zatem stałe komnożenia $\text{Res} : R(\mathfrak{S}_{\bullet}) \rightarrow R(\mathfrak{S}_{\bullet}) \otimes R(\mathfrak{S}_{\bullet})$ są też równe $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$.

12.12 Wzór 3)

$$S_\lambda(t_1, t_2, \dots, t_n) = \det \begin{pmatrix} \boxed{h_{\lambda_1}} & h_{\lambda_1+1} & \dots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & \boxed{h_{\lambda_2}} & \dots & h_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & & & \\ h_{\lambda_n-n+1} & h_{\lambda_1} & \dots & \boxed{h_{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

gdzie

$$\sum_j h_j u^j = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - t_i u}$$

12.13 [Dowód Fulton-Harris A.2] Mamy

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} h_i \right) \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i e_i \right) = 1$$

gdzie e_i oznaczane też przez σ_i są elementarnymi funkcjami symetrycznymi.

- Dla każdego $1 \leq j \leq n$, $p \geq n$ mamy (bo dla $p = n$ tak jest)

$$t_j^p - e_1 t_j^{p-1} + \dots \pm e_n t_j^{p-n} = 0$$

- Dla każdego $q > 0$

$$h_q - e_1 h_{q-1} + \dots \pm e_n h_{q-n} = 0$$

- Zarówno t_j^p jak i h_{p-m} otrzymane przez tę samą liniową rekurencję, więc p -ty wyraz wyraża się przez tę samą formułę liniową od pierwszych n elementów. Dla $p \geq n$

$$t_j^p = A(p, 1)t_j^{n-1} + \dots + A(p, n)t_j^0$$

Dla $q > 0$

$$h_q = A(p, 1)h_{q-p+n-1} + \dots + A(p, n)h_{q-p}$$

podstawiając $q = p - m$, $0 \leq m < n$

$$h_{p-m} = A(p, 1)h_{n-m-1} + \dots + A(p, n)h_{-m}$$

- Zapisujemy macierzowo dla $p \in \{\lambda_i + n - i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$

$$\{t_j^{\lambda_i+n-i}\}_{i,j} = \{A(\lambda_r + n - i, r)\}_{i,r} \cdot \{t_j^{n-r}\}_{r,j},$$

oraz $q = p - m = \lambda_i + i - j$, tzn $m = n - j$, $j = 1, 2, \dots, n$

$$\{h_{\lambda_i+j-i}\}_{i,j} = \{A(\lambda_r + n - i, r)\}_{i,r} \cdot \{h_{j-r}\}_{r,j},$$

To są macierze odwracalne, więc

$$\frac{\det(\{t_j^{\lambda_i+n-i}\}_{i,j})}{\det(\{t_j^{n-r}\}_{r,j})} = \frac{\det(\{h_{\lambda_i+j-i}\}_{i,j})}{\det(\{h_{j-r}\}_{r,j})}$$

Drugi mianownik jest równy 1.

12.14 Klasy charakterystyczne. Niech V będzie wiązką wektorową. Zakładamy (jedynie dla wygody), że baza jest rozmaitością. Podamy geometryczną konstrukcję klasy $S_k(V)$ tzn klasy Schura odpowiadającej $\lambda = (k)$. Klasa ta jest też oznaczana $s_k(V)$ i nazywana klasa Segre.

- Niech $q : \mathbb{P}(V^*) \rightarrow X$ będzie rzutowaniem, $n = \dim V$

$$s_k(V) = q_*(c_1(\mathcal{O}(1))^{k+n-1})$$

- Totalna klasa Segre $s(V) = 1 + s_1(V) + s_2(V) + \dots$ jest równa $c(V^*)^{-1} = (1 - c_1(V) + \dots \pm c_n(V))^{-1}$. Dowód: Obliczamy $s(V)c(V^*)$:

$$s(V)c(V^*) = q_*(c(\mathcal{O}(-1))^{-1})c(V^*) = q_*(c(\mathcal{O}(-1))^{-1}q^*c(V^*)) = q_*(c(q^*(V^*)/\mathcal{O}(-1))),$$

bo $\mathcal{O}(-1)$ jest podwiązką $q^*(V^*)$. Wiązka ilorazowa $Q = q^*(V^*)/\mathcal{O}(-1)$ ma wymiar $n - 1$, więc jej klasy Cherna $c(Q) = c(q^*(V^*)/\mathcal{O}(-1))$ są niezerowe w gradacjach $\leq n - 1$, stąd popchnięcie $q_*(c(q^*(V^*)/\mathcal{O}(-1)))$ jest zerowe w dodatnich gradacjach.

12.15 Z zasady rozszczepiania, tzn w terminach pierwiastków Cherna

$$s_k(V) = h_k(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

12.16 Formuła Giambelli.

- Niech $Gr^n(V)$ będzie grassmannianem parametryzującym ilorazy $V \rightarrow Q$, $\dim(Q) = n$. Nad $Gr^n(V)$ mamy tautologiczną wiązkę ilorazową (rangi n), oznaczaną przez Q .
- Dany ciąg liczb $\lambda_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$ oraz ciąg podprzestrzeni

$$V_\lambda : V \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n, \quad \dim(V_j) = v_j$$

oraz $\lambda_j = v_j - n + j$ (ciąg v_j jest malejący, a ciąg λ_j nierosnący.)

- Definiujemy zbiór

$$\Omega(V_\lambda) \subset Gr^n(V)$$

przez warunki Schuberta

$$\dim \operatorname{coker}(V_1 \rightarrow Q) \geq 1, \quad \dots, \quad \dim \operatorname{coker}(V_n \rightarrow Q) \geq n$$

Ćwiczenie: Kowymiar $\Omega(V_\bullet)$ jest równy $|\lambda| = \sum \lambda_i$

- **Twierdzenie:**

$$[\Omega(V_\bullet)] = S_\lambda(Q) \in H^{2|\lambda|}(Gr^n(V)).$$

13 Formuła Giambelli

Funkcje supersymetryczne. Dane dwa zestawy zmiennych $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ oraz funkcja symetryczna $f(t_1, t_2, \dots, t_N) = P(e_1, e_2, \dots, e_N)$, gdzie P jest wielomianem, a e_i elementarnymi wielomianami symetrycznymi od t_i . Definiujemy

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) = P(c_1, c_2, \dots, c_N),$$

gdzie c_k spełniają

$$\frac{\prod_{i=1}^n (1 + x_i h)}{\prod_{j=1}^m (1 - y_j h)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k$$

- Np $e_i(\emptyset; X) = h_i(X)$, w ogólności $S_\lambda(X; Y) = S_{\lambda^\vee}(Y; X)$
- Jeśli $x_i = y_j$ dla pewnych i, j , to

$$f(X; Y) = f(X \setminus \{x_i\}; Y \setminus \{y_j\}).$$

13.1 Dla wirtualnych wiązek wektorowych, to znaczy formalnych różnic $E - F$ oraz funkcji symetrycznej f definiujemy klasę charakterystyczną $f(E - F)$ jako $P(c_1, c_2, \dots, c_N)$, gdzie c_k spełnia

$$\frac{\sum_{i=0}^{\dim E} c_i(E) h^i}{\sum_{j=0}^{\dim F} c_j(F) h^j} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k$$

13.2 Dla wiązki $E \rightarrow X$ wymiaru n , niech $q : \mathbb{P}(E^*) \rightarrow X$. Definiujemy klasy Segre

$$s_k(E) := q_*(c_1(\mathcal{O}(1))^{k+n-1}).$$

13.3 Równoważnie: Jeśli $L = \mathcal{O}(-1)$ jest wiązką tautologiczną nad $\mathbb{P}(E)$, $q : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$, to

$$q_*(c_1(L)^{k+n-1}) = (-1)^{n+1} s_k(E).$$

- Wynika stąd, że dla dowolnej wiązki $F \rightarrow X$

$$q_*(S_i(L - q^*F)) = (-1)^{n+1} S_{i-n+1}(Q_n - F). \quad (1)$$

(Wskazówka: formuła Whitneya.)

13.4 Klasa Schura dla ciągu wiązek E_1, E_2, \dots, E_n . Niech $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ będzie ciągiem liczb (niekoniecznie monotonicznym). Definiujemy

$$S_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(E_1, E_2, \dots, E_n) = \left| S_{\lambda_p - p + q}(E_p) \right|_{1 \leq p, q \leq n} =$$

$$= \begin{vmatrix} S_{\lambda_1}(E_1) & S_{\lambda_1+1}(E_1) & \dots & S_{\lambda_1+n-1}(E_1) \\ S_{\lambda_2-1}(E_2) & S_{\lambda_2}(E_2) & \dots & S_{\lambda_1+n-2}(E_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{\lambda_n-n+1}(E_n) & S_{\lambda_n-n+2}(E_n) & \dots & S_{\lambda_n}(E_n) \end{vmatrix}$$

13.5 Rozszerzamy definicję dla wirtualnych wiązek.

13.6 Formuła Giambelli: dla flagi podwiązek (nie musi być pełna flaga, bo w definicji pojedynczej klatki Schura występują tylko niektóre elementy flagi).

• Zakładamy $\dim V = N \geq n$, przez $Gr^n(V)$ oznaczamy wiązkę Grassmanna parametryzującą ilorazy V wymiaru n . Oczywiście $Gr^n(V) = Gr_{N-n}(V)$. Niech Q_n będzie tautologiczną wiązką ilorazową. Mamy dane podwiązki

$$V_\lambda : V \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n$$

$\dim(V_j) = v_j$ dla $i = 1, \dots, n$, gdzie $\lambda_j = v_j - n + j$ (v_j jest malejący, a λ_j nierosnący). Definiujemy wiązkę rozmaitości Schuberta

$$\Omega(V_\lambda) = \{Q \in Gr^n(V) \mid \forall i = 1, 2, \dots, n \quad \dim \operatorname{coker}(V_i \rightarrow Q_n) \geq i\}$$

(omijamy w notacji pull-back z X do $Gr^n(V)$).

13.7 Niech $V = \mathbb{C}^{n+m}$,

$$Gr^n(\mathbb{C}^{n+m}) = Gr_m(\mathbb{C}^{n+m}),$$

$$\mathbb{C}^{n+m} \twoheadrightarrow Q \quad \rightsquigarrow \quad K = \ker(\mathbb{C}^{n+m} \twoheadrightarrow Q).$$

Przestrzeń \mathbb{C}^v utożsamiamy z podprzestrzenią \mathbb{C}^{n+m} rozpiętą przez pierwsze wektory. Warunki Schuberta są równoważne następującym:

$$\dim \operatorname{coker}(\mathbb{C}^v \rightarrow Q) \geq i \quad \equiv \quad \dim \operatorname{im}(\mathbb{C}^v \rightarrow Q) \leq n - i \quad \equiv \quad \dim(K \cap \mathbb{C}^v) \geq v - n + i,$$

czyli

$$\dim(K \cap V_i) \geq \lambda_i.$$

• Ciąg zerowy, $V_1 = \mathbb{C}^{n-1}, V_2 = \mathbb{C}^{n-2}, \dots$: warunek Schuberta „ $\dim \operatorname{coker}(V_i \rightarrow Q) \geq n - i$ ” jest pusty.

13.8 Niech $\lambda = (k, 0, 0, \dots, 0)$, co zapisujemy pomijając 0. Wtedy $v_1 = k + n - 1, v_2 = n - 2, \dots$. Jedynie pierwszy warunek Schuberta jest nietrywialny

$$\dim(K \cap \mathbb{C}^{k+n-1}) \geq k.$$

• Zauważmy, że oczekiwany wymiar przecięcia to $K \cap \mathbb{C}^{k+n-1}$

$$m + (k + n - 1) - (n + m) = k - 1.$$

Zatem

$$\Omega_{(k)} = \{K \subset \mathbb{C}^{n+m} \mid \dim(K) = m, \quad K \text{ nietranswersalne do } \mathbb{C}^{k+n-1}\}$$

13.9 Niech

$$\Omega(V_\lambda)^\circ = \{Q \in Gr^n(V) \mid \forall i = 1, 2, \dots, n \quad \dim \operatorname{coker}(V_i \rightarrow Q_n) = i\}$$

oznacza otwartą komórkę Schuberta (wiązkę komórek Schuberta). To jest zbiór otwarty i gęsty w $\Omega(V_\lambda)$. Każdy element $Q \in \Omega(V_\lambda)^\circ$ wyznacza ciąg ilorazów

$$Q^{[i]} := \operatorname{coker}(V_i \rightarrow Q), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Z definicji $\Omega(V_\lambda)^\circ$ mamy $\dim Q^{[i]} = i$. Zatem na zbiorze $\Omega(V_\lambda)^\circ$ mamy kanonicznie zdefiniowane odwzorowanie (*podniesienie*) do przestrzeni częściowych flag

$$\Omega(V_\lambda)^\circ \rightarrow Fl^{n, n-1, \dots, 1}(V) = Fl_{N-n, N-n+1, \dots, N-1}(V).$$

Będziemy tylko wykorzystywać podniesienie do 2-stopniowych flag $Fl^{n, n-1}(V)$, nad którą mamy tautologiczne wiązki ilorazowe Q_n i Q_{n-1} oraz ciąg odwzorowań $V \twoheadrightarrow Q_n \twoheadrightarrow Q_{n-1}$. Tam obraz $\Omega(V_\lambda)^\circ$ jest zadany przez

$$\dim \operatorname{coker}(V_n \rightarrow Q_n) = n, \quad \text{oraz} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \quad \dim \operatorname{coker}(V_j \rightarrow Q_{n-1}) = j, \quad (2)$$

bo

$$\ker(Q_n \rightarrow Q_{n-1}) = \operatorname{im}(V_{n-1}) \subset \operatorname{im}(V_j) \quad \text{dla } j < n,$$

więc

$$\operatorname{coker}(V_j \rightarrow Q_n) \simeq \operatorname{coker}(V_j \rightarrow Q_{n-1}) \quad \text{dla } j < n.$$

Domknięcie $\Omega(V_\lambda)^\circ$ jest zdefiniowane przez nierówności \geq zamiast równości w (2). Oczywiście warunek $\dim \operatorname{coker}(V_n \rightarrow Q_n) \geq n$ oznacza, że $V_n \rightarrow Q_n$ jest zerowe.

13.10 Formuła Giambelli: dla wiązek nad punktem:

$$[\Omega(V_\lambda)] = S_\lambda(Q_n).$$

- Oryginalna praca: G. Z. Giambelli, *Risoluzione del problema degli spazi secanti*, Mem. Accad. Sci. Torino (2) **52** (1902), 171–211.

- Zobacz dowód z formuły Pieri w [Griffiths-Harris, str 205.]

13.11 Formuła Giambelli (wersja Kempf-Laksov-Lascoux dla wiązki V z flagą podwiązek):

Twierdzenie. Niech Q będzie tautologiczną wiązką ilorazową (rangi n) nad $Gr^n(V)$

$$[\Omega(V_\lambda)] = S_\lambda(Q - V_1, Q - V_2, \dots, Q - V_n) \in H^*(Gr^n(V)).$$

13.12 Użyteczny lemat: (ćwiczenie) Jeśli $\dim E = m$, to

$$c_m(\operatorname{Hom}(E, L)) = S_m(L - E). \quad (3)$$

(wsk $LHS = \prod(a - x_i)$, $RHS = [(1 + a + a^2 + \dots) \prod(1 - x_i)]_m$.)

13.13 Lemat Jacobi-Lascoux: Niech $0 \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow 0$ będzie ciągiem dokładnym wiązek, $\dim L = 1$, $\dim V_n = \lambda_n$. Wtedy

$$\begin{aligned} & S_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n + n - 1)}(P - V_1, P - V_2, \dots, L - V_n) = \\ & = (-1)^{n+1} S_{(\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_{n-1} + 1)}(Q - V_1, \dots, Q - V_{n-1}) S_{\lambda_n}(L - V_n). \end{aligned}$$

Dowód. LHS

$$\begin{vmatrix} S_{\lambda_1}(P - V_1) & S_{\lambda_1 + 1}(P - V_1) & \dots & S_{\lambda_1 + n - 1}(P - V_1) \\ S_{\lambda_2 - 1}(P - V_2) & S_{\lambda_2}(P - V_2) & \dots & S_{\lambda_2 + n - 2}(P - V_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{\lambda_{n-1} - n + 2}(P - V_{n-1}) & S_{\lambda_{n-1} - n + 3}(P - V_{n-1}) & \dots & S_{\lambda_{n-1} + 1}(P - V_{n-1}) \\ S_{\lambda_n}(L - V_n) & S_{\lambda_n + 1}(L - V_n) & \dots & S_{\lambda_n + n - 1}(L - V_n) \end{vmatrix}$$

Korzystamy z

$$S_i(Q - V_j) = S_i(P - V_j) - S_{i-1}(P - V_j)S_1(L) \quad (4)$$

$$S_i(-V_n) = S_i(L - V_n) - S_{i-1}(L - V_n)S_1(L) \quad (5)$$

Działamy i -tą kolumną na $i + 1$ -szą (idąc od końca) i dostajemy

$$\begin{vmatrix} S_{\lambda_1}(P - V_1) & S_{\lambda_1 + 1}(Q - V_1) & \dots & S_{\lambda_1 + n - 1}(Q - V_1) \\ S_{\lambda_2 - 1}(P - V_2) & S_{\lambda_2}(Q - V_2) & \dots & S_{\lambda_2 + n - 2}(Q - V_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{\lambda_{n-1} - n + 2}(P - V_{n-1}) & S_{\lambda_{n-1} - n + 3}(Q - V_{n-1}) & \dots & S_{\lambda_{n-1} + 1}(Q - V_{n-1}) \\ S_{\lambda_n}(L - V_n) & S_{\lambda_n + 1}(-V_n) & \dots & S_{\lambda_n + n - 1}(-V_n) \end{vmatrix}$$

Ostatni wiersz jest zerowy poza pierwszym wyrazem (tam stoją $S_\ell(-V_n) = c_\ell(V_n^*)$, $\dim V_n < \ell$). \square

13.14 Dowód formuły Giambeli-KLL. Indukcja po n . Gdy $n = 1$ to $\Omega(V_\lambda)$ jest zadana przez zerowanie się $V_1 \rightarrow Q_1$. Stąd $[\Omega(V_\lambda)] = c_{v_1}(\text{Hom}(V_1, Q_1))$, co jest równe $S_{v_1}(Q_1 - V_1)$ z (3).

Krok indukcyjny

$$\begin{array}{ccc} Fl^{n,n-1}(V) & \xrightarrow{p} & Gr^{n-1}(V) \\ q \downarrow & & \downarrow \\ Gr^n(V) & \longrightarrow & X \end{array}$$

gdzie $Fl^{n,n-1}(V)$ jest wiązką dwustopniowych flag $V \rightarrow Q_n \rightarrow Q_{n-1}$. Niech $Z \subset Gr^{n-1}(V)$ będzie opisane

$$\dim \text{coker}(V_1 \rightarrow Q_{n-1}) \geq 1, \dots, \dim \text{coker}(V_{n-1} \rightarrow Q_{n-1}) \geq n-1.$$

Definiujemy podzbiór w $W \subset p^{-1}Z$ przez warunek

$$\text{odwzorowanie } V_n \rightarrow Q_n \text{ jest zerowe.} \quad (6)$$

Rzutowanie $q : W \rightarrow \Omega(V_\lambda)$ is jest izomorfizmem, poza zbiorem mniejszego wymiaru (tzn jest biwymiernym odwzorowaniem). Nad zbiorem

$$\{Q \in Gr^n(V) : \dim \text{coker}(V_{n-1} \rightarrow Q) = n-1\},$$

gdzie przestrzeń Q_{n-1} jest wyznaczona jednoznacznie i $q|_W$ jest izomorfizmem. Zatem

$$[\Omega(V_\lambda)] = q_*[W] \in H^*(Gr^n(V)). \quad (7)$$

Obliczamy klasę $[W] \in H^*(Fl^{n,n-1}(V))$. Na $p^{-1}Z$ odwzorowanie $V_n \rightarrow Q_n$ faktoryzuje się przez L bo $V_n \subset V_{n-1}$ i $V_{n-1} \rightarrow Q_{n-1}$ jest zerowe.

$$\begin{array}{ccccc} & & V_n & \subset & V_{n-1} \\ & \swarrow & \downarrow & & \downarrow = 0 \\ L & \subset & Q_n & \rightarrow & Q_{n-1} \end{array}$$

Stąd warunek (6) jest równoważny

$$\text{odwzorowanie } V_n \rightarrow L \text{ jest zerowe.} \quad (8)$$

Stąd

$$[W] = [p^{-1}Z] \cdot c_{v_n}(\text{Hom}(V_n, L)),$$

przy czym mamy $v_n = \lambda_n$. Z założenia indukcyjnego

$$[Z] = S_{(\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_{n-1}+1)}(Q_{n-1} - V_1, Q_{n-1} - V_2, \dots, Q_{n-1} - V_{n-1}) \in H^*(Gr^{n-1}(V)). \quad (9)$$

cofamy tę równość do $H^*(Fl^{n,n-1}(V))$ (opuszczając p^* w oznaczeniach wiązek) i otrzymujemy wzór na $[p^{-1}(Z)]$. Z Lematu Jacobi-Lascoux

$$\begin{aligned} [W] &= (9) \cdot c_{\lambda_n}(\text{Hom}(V_n, L)) \stackrel{(3)}{=} (9) \cdot S_{\lambda_n}(L - V_n) \stackrel{[JL]}{=} \\ &= (-1)^{n+1} S_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n+n-1)}(Q_n - V_1, Q_n - V_2, \dots, L - V_n) \end{aligned}$$

Bierzemy push-forward $[W]$ w wiązkę $q : Fl^{n,n-1}(V) \rightarrow Gr^n(V)$, która ma włókno równe $\mathbb{P}(Q_n)$. Tautologiczna wiązka $\mathcal{O}(-1)$ jest równa L . Liczmy

$$q_* S_j(L - V_n) = (-1)^{n+1} S_{j-n+1}(Q_n - V_n)$$

z formuły (1). (Stosujemy dla $j = \lambda_n, \lambda_n + 1, \dots, \lambda_n + n - 1$.) Z formuły projekcji $q_*(q^*(\alpha) \cdot \beta) = \alpha \cdot q_*(\beta)$

$$\begin{aligned} q_* S_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n+n-1)}(Q_n - V_1, Q_n - V_2, \dots, L - V_n) &= \\ = (-1)^{n-1} S_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)}(Q_n - V_1, Q_n - V_2, \dots, Q_n - V_n). \end{aligned} \quad (10)$$

□

14 Wielomiany i hipoteza Kazhdana-Lusztiga

14.1 Poprzednio opisywaliśmy odpowiedniość pomiędzy

- 1) Teoria reprezentacji \mathfrak{S}_\bullet
- 2) Teoria reprezentacji GL_n ($n \rightarrow \infty$)
- 3) Rachunek Schuberta w Grassmanianach

14.2 Zajmiemy się inną odpowiednością:

- 1) Algebra Hecke $\mathcal{H}_n(q)$ z wyróżnioną bazą zadaną przez wielomiany K-L (deformacja pierścienia grupowego $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$)
 - 2) Teoria reprezentacji dla \mathfrak{sl}_n (moduły Vermy – *Verma modules*)
 - 3) Osobliwości rozmaitości Schuberta w przestrzeni flag $Fl_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B$
- Streszczenia: patrz [Kirwan, Introduction to intersection cohomology, roz 12], [Billey-Lakshmibai, Singular Loci of Schubert Varieties, roz 6]

1. Samodualna baza w $\mathcal{H}_n(q)$

patrz też [Humphreys, Reflection Groups and Coxeter Groups, roz 7.9]

14.3 W $\mathcal{H}_n(q)$ mamy inwolucję, antyautomorfizm zadany przez $i : T_v \mapsto (T_v)_{q:=q^{-1}}^{-1}$.

14.4 Twierdzenie [Kazhdan-Lusztig] Istnieje baza $\{C'_w\}_{w \in \mathfrak{S}_n} \subset \mathcal{H}_n(q)[q^{\pm \frac{1}{2}}]$ taka, że

1. $i(C'_w) = C'_w$
2. $C'_w = q^{-\frac{\ell(w)}{2}} (T_w + \sum_{v \prec w} P_{v,w}(q)T_v)$
3. $P_{v,w}$ jest wielomianem i $\deg(P_{v,w}) \leq \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(v) - 1)$ dla $v < w$

Ta baza (a zatem i wielomiany $P_{v,w} \in \mathbb{Z}[q]$) są wyznaczone jednoznacznie. To są wielomiany Kazhdana-Lusztiga. Warunek 1. można wyrazić za pomocą wielomianów $R_{u,w}$ dla $u \preceq w$.

- (W Humphreysie używane jest C_w z trochę inną normalizacją, patz uwaga na koniec §7.9.)

14.5 Przykład $n = 2$, $\mathfrak{S}_2 = \{1, \tau\}$

$$P_{1,1} = 1 \quad P_{\tau,1} = 0 \quad P_{1,\tau} = 1 \quad P_{\tau,\tau} = 1$$

$$C'_1 = 1$$

$$C'_\tau = q^{-\frac{1}{2}}(T_\tau + T_1)$$

Stosujemy inwolucję

$$T_\tau^{-1} = \frac{1}{q}(T_\tau - (q-1)T_1) = \frac{1}{q}T_\tau - T_1 + \frac{1}{q}T_1.$$

$$i(C'_\tau) = q^{\frac{1}{2}}(T_\tau^{-1} + T_1^{-1}) = q^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{q}T_\tau - T_1 + \frac{1}{q}T_1\right) + T_1\right) = q^{-\frac{1}{2}}(T_\tau + T_1) = C'_\tau.$$

14.6 Dla $n \leq 3$ wszystkie wielomiany K-L są równe 1 lub 0, w zależności od tego czy $v \preceq w$.

14.7 Dla $n = 4$ mamy

$$P_{v,s_2s_1s_3s_2}(q) = 1 + q \quad \text{dla } v \preceq s_2$$

$$P_{v,s_1s_2s_3s_2s_1}(q) = 1 + q \quad \text{dla } v \preceq s_1s_3$$

14.8 Np dla $n = 5$

$$P_{id,(52341)} = q^2 + 2q + 1, \quad P_{id,(45312)} = q^2 + 1.$$

14.9 Patrz

<https://www.math.ias.edu/~goresky/tables.html>

https://doc.sagemath.org/html/en/thematic_tutorials/lie/kazhdan_lusztig_polynomials.html

14.10 Hipoteza Kazhdana-Lusztiga: Wielomiany $P_{w,v}$ mają nieujemne współczynniki.

2. Filtracja w modułach Vermy

14.11 W algebrze Lie \mathfrak{sl}_n mamy podalgebry \mathfrak{t} , \mathfrak{n}_+ , \mathfrak{n}_- , $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}_+$.

14.12 Algebra obwiednia dla algebry Lie \mathfrak{h} jest oznaczana $U(\mathfrak{h})$. Jako przestrzeń wektorowa jest izomorficzna z $Sym(\mathfrak{h})$ (z zachowaniem filtracji stopniem).

14.13 Niech $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$ będzie charakterem. Definiujemy moduł Vermy

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda}$$

(to przypomina konstrukcję wiązki L_{λ} nad $GL_n(\mathbb{C})/B$.)

14.14 Przykład $n = 2$; $\mathfrak{sl}_2 = \text{lin}(X, Y, H)$ Zbiór wag utożsamiamy z \mathbb{Z} , $\rho = 1$. Niech v będzie wektorem najwyższej wagi: $Hv = \lambda v$, $Xv = 0$. Wtedy wektory $Y^n v$ dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ rozpinają $M(\lambda)$. Dowodzimy indukcyjnie

$$XY^n v = (\lambda + (\lambda - 2) + (\lambda - 4) + \dots + (\lambda - 2(n - 1)))Y^{n-1} v = n(\lambda - (n - 1))Y^{n-1} v.$$

Jeśli $\lambda = n - 1$, to wektor $Y^n v$ jest anihilowany przez X , zatem generuje podreprezentację $M(\lambda)$ o największej wadze $\lambda - 2(n - 1) = \lambda - 2(\lambda + 1) = -\lambda - 2$. Wtedy mamy ciąg dokładny

$$0 \rightarrow M(-\lambda - 2) \rightarrow M(\lambda) \rightarrow V_{\lambda} \rightarrow 0$$

Gdzie

$$V_{\lambda} = Sym^{\lambda}(\mathbb{C}^2) \quad \text{dla } \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Zauważmy, że $(-\lambda - 2) + 1 = -(\lambda + 1) = \text{odbcie}(\lambda + 1)$.

14.15 Jako przestrzeń wektorowa $M(\lambda)$ jest izomorficzna z $U(\mathfrak{n}_-)$. Wagi działania torusa są przesunięte o λ .

14.16 Jeśli λ jest podziałem, to V_{λ} jest ilorazem $M(\lambda)$.

14.17 Twierdzenie: (Bernstein-Gelfand-Gelfand): Istnieje filtracja $M(\lambda)$

$$M(\lambda) = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_m = 0$$

taka, że

– M_i/M_{i+1} jest nieprzywiedlny

– iloraz M_i/M_{i+1} jest generowany przez wektor najwyższej wagi μ , oraz $\mu + \rho$ i $\lambda + \rho$ leżą w tej samej orbicie działania grupy Weyla \mathfrak{S}_n

– $\lambda + \rho = v(\lambda_0 + \rho) = w(\mu_0 + \rho)$, λ_0 jest wagą z dominującej komory Weyla, oraz $\ell(v) \leq \ell(w)$.

Tu ρ jest standardową notacją oznaczającą połowę sumy pierwiastków dodatnich \mathfrak{sl}_n .

Ponadto multi-zbiór wag μ nie zależy od wyboru filtracji. Waga λ występuje jednokrotnie.

14.18 Oznaczmy przez $p_{w,v}$ krotność μ w $M(\lambda)$ (to nie zależy od wyboru v, w).

14.19 Twierdzenie: Mamy $p_{w,v} = P_{w,v}(1)$.

3. Osobliwości różnistości Schuberta we flagach

14.20 Naogół $X_w \subset Fl_n$ ma osobliwości (tak jest zawsze, jeśli w zawiera „patern” 3412 lub 4231).

14.21 Odwzorowanie dualności Poincaré $PD : H^*(X_w) \xrightarrow{[X] \cap} H_{2 \dim X_w}(X_w)$ nie zawsze jest izomorfizmem.

• Na poziomie snopów: $\mathbb{Q}_{X_w} \not\cong D(\mathbb{Q}_{X_w}) := RHom(\mathbb{Q}_{X_w}, \mathbb{Q}_{Fl_n}[2 \dim(Fl_n)])$ z dokładnością do przesunięcia gradacji (są różne konwencje).

14.22 Twierdzenie Goresky-MacPherson: istnieją snopy \mathbb{Q} -przestrzeni wektorowych nad X (a raczej kompleksy snopów, elementy kategorii pochodnej), oznaczane IC_X , takie, że $D(IC_X) \simeq IC_X$ a ponadto

$$(IC_X)|_{X_{smooth}} = \mathbb{Q}_{X_{smooth}}$$

$$\text{codim}_{\mathbb{C}}(\text{supp}\mathcal{H}^k(IC_X)) \leq k - 1, \quad \text{dla } k > 0.$$

Oznaczenie IC od „intersection complex”, $IH^*(X) := H^*(X; IC_X)$ nazywa się „intersection cohomology”, „kohomologie przecięciowe”.

14.23 Beilinson-Bernstein-Deligne-(Gabber): konstrukcja może być przeprowadzona dla rozmaitości nad ciałem skończonym. Snopy IC_X dopuszczają działanie automorfizmu Frobeniusa i są „czyste”.

- Globalnie: Frobenius na $IH^k(X)$ ma wartości własne o module $q^{\frac{k}{2}}$.
- Lokalnie: w przypadku² komórek Schuberta Frobenius na źdźble $\mathcal{H}_x^k(IC_{X_w})$ działa jak mnożenie przez $q^{k/2}$. (Nieparzyste kohomologie znikają.)

14.24 Wynika z tego, że

$$IH^k(X_w) \simeq \bigoplus_{v \preceq w} H_c^k(X_v^o; IC_w)$$

(suma po kohomologiach o zwartych nośnikach) oraz

$$H_c^k(X_v^o; IC_w) \simeq \mathcal{H}_x^{k-2\ell(v)}(IC_{X_w}), \quad x \in X_v$$

Zamiast $\mathcal{H}_x^{k-2\ell(v)}(IC_{X_w})$, $x \in v$ będziemy pisać $\mathcal{H}_v^{k-2\ell(v)}(IC_{X_w})$.

14.25 Powyższy wzór można traktować jak liczenie punktów w X_w z krotnościami zależnymi od v dla $x \in X_v^o$:

$$\sum_{k=0}^{2\ell(w)} \dim IH^k(X_w) q^{k/2} = \sum_{v \preceq w} \tilde{P}_{v,w}(q) q^{\ell(v)},$$

jest IH-wielomianem Poincaré oraz

$$\tilde{P}_{v,w}(q) = \sum_{v \preceq w} \dim \mathcal{H}_v^k(IC_{X_w}) q^{k/2}.$$

jest lokalną krotnością.

14.26 Twierdzenie: [Brylinski-Kashiwara, Beilinson-Bernstein]

$$P_{v,w}(q) = \sum_k \dim(H_x^{k/2}(IC_{X_w})) q^k, \quad x \in X_v.$$

- Ze wzoru widać, że współczynniki są nieujemne.

14.27 W K-teorii konstruowalnych snopów przestrzeni wektorowych nad \mathbb{Q}

$$IC_{X_w} = \sum_{v \preceq w} \sum_d a_{v,w,d} \mathbb{Q}_{X_v^o}[2d]$$

gdzie

$$\sum_d a_{v,w,d} q^d = P_{v,w}(q)$$

- Uwzględniając działanie Frobeniusa, przyjmujemy konwencję: $q \cdot \mathbb{Q}_{X_v^o}$ ma przesuniętą gradację o 2 i działanie Frobeniusa jest skręcone o q . Możemy napisać

$$IC_{X_w} = \sum_{v \preceq w} P_{v,w}(q) \cdot \mathbb{Q}_{X_v^o}.$$

Równoważnie

$$P_{v,w}(q) = \tilde{P}_{v,w}(q).$$

²Dla ogólnego snopa S warunek czystości oznacza 1) wartości własne F na $\mathcal{H}_x^k(S)$ mają moduł $q^{l/2}$ dla $l \leq k$ i to samo zachodzi dla $D(S)$.