

Zadania o Kwaternionach

Bazowe kwaterniony $1, i, j, k$ można przedstawić jako macierze z grupy $SU(2)$:

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & i &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \\ j &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & k &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Te macierze spełniają relacje takie jak elementy grupy kwaternionów Q_8 :

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j.$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Definiujemy algebrę kwaternionów jako podalgebrę macierzy zespolonych rozpiętą przez $1, i, j, k$

$$\mathbb{H} = \text{lin}_{\mathbb{R}}\{1, i, j, k\}.$$

1. Norma i sprzężenie kwaternionu

Pokaż, że dla dowolnego kwaternionu $q = a + bi + cj + dk$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2 := a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

gdzie $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ to sprzężenie kwaternionu q .

2. Antyprzemienność

Udowodnij

$$\begin{aligned} \overline{q_1 q_2} &= \bar{q}_2 \bar{q}_1 \\ |q_1 q_2| &= |q_1| |q_2| \end{aligned}$$

3. Odwrotność kwaternionu

Udowodnij, że kwaternion $q \neq 0$ jest odwracalny

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}.$$

4. Działanie kwaternionów

Kwaternion $q \neq 0$ działa na $\mathbb{H}$ przez sprzęganie

$$x \mapsto qxq^{-1}.$$

Wykaż, że to jest działanie jest przez izometrię, oraz przestrzeń czystych kwaternionów

$$\text{im}(\mathbb{H}) = \text{lin}\{i, j, k\}$$

jest niezmiennicza.

5. Reprezentacja obrotu

Utożsamiamy $\text{im}(\mathbb{H})$ z $\mathbb{R}^3$. Pokaż, że kwaternion jednostkowy $q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)(ix + jy + kz)$ zadaje obrót o kąt θ wokół osi rozpiętej przez wektor (x, y, z) .

6. Kwanterniony a grupa $SU(2)$

Wykaż, że grupa

$$SU(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) : A\bar{A}^T = I, \det A = 1\}$$

jest izomorficzna z jednostkowymi kwaternionami $S^3 \subset \mathbb{H}$.

7. Nakrycie

Uzasadnij, że otrzymane odwzorowanie $\mathbb{H} \supset S^3 \rightarrow SO(3)$ jest surjektywne, 2:1.

8. Topologia $SO(3)$

Uzasadnij, że grupa $SO(3)$ jest homeomorficzna z rzeczywistą przestrzenią rzutową trójwymiarową.

9. Exp kwaternionu

Z definicji kwaternion jest pewną macierzą zespoloną rozmiaru 2×2 . Mamy zdefiniowane

$$\exp(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}.$$

Pokaż, że eksponenta kwaternionu czystego $q = ix + jy + kz$ jest dana wzorem

$$\exp(q) = \cos(|q|) + \hat{q} \sin(|q|),$$

gdzie $\hat{q} = \frac{q}{|q|}$ jest jednostkowym kwaternionem wzdłuż osi q .

10. Kwanterniony i macierze Pauliego

Macierze Pauliego to:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Przedstaw związek między kwaternionami a macierzami Pauliego. Niech P będzie rzeczywistą przestrzenią liniową rozpiętą przez macierze Pauliego. Wykaż, że

$$P \oplus im(\mathbb{H}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) := \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) ; tr(A) = 0\}.$$