1. Udowodnić, że jeżeli H jest domkniętą podgrupą, to przestrzeń warstw G/H jest rozmaitością. (Wskazówka: rozważyć mapę, którą używaliśmy w dowodzie twierdzenia Cartana).

2. Rozpatrujemy grupę $SL(2,\mathbb{R})$ i $SL(2,\mathbb{C})$.

a) Pokazać, że grupa $SL(2,\mathbb{R})$ jest sprzężona w $GL(2,\mathbb{C})$ z grupą macierzy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{C}$ i $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

b) Korzystając z przedstawienia powyżej, pokazać że $SL(2,\mathbb{R})$ jako przestrzeń topologiczna jest homeomorficzna z otwartym torusem $S^1 \times D$, gdzie D jest otwartym dyskiem.

c) Udowodnić, że algebra Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ składa się z macierzy o śladzie równym 0.

d) Udowodnić, że forma Jordana (jako macierz zespolona) jest postaci

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} (\lambda \in \mathbb{R} \text{ lub } \lambda \in i\mathbb{R}) \qquad \text{lub} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e) Wywnioskować, że wartości własne macierzy macierzy, która leży na jednoparametrowej podgrupie są obie dodatnie, obie są liczbami zespolonymi o module 1 lub obie są równe 1. Wywnioskować, że exp dla $SL(2,\mathbb{R})$ nie jest odwzorowaniem "na".

f) Pokazać, że $exp : \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \to GL(2,\mathbb{C})$ jest "na".