Zadania na ćwiczenia z grup Liego 1

1 Niech G będzie grupą topologiczną, a H podgrupą. Udowodnić, że działanie G na zbiorze warstw:

$$G \times G/H \to G/H$$

jest ciągłe.

2 Udowodnić, że jeśli G jest spójną grupą topologiczną, $H \subset G$ jest grupą dyskretną i normalną, to H jest zawarta w centrum G.

3 Udowodnić, że grupa podstawowa grupy topologicznej jest przemienna.

4 Utożsamić $\mathbb{R}^3$ z $im(\mathbb{H})$. Udowodnić, że mnożenie kwaternionów urojonych ma postać

$$vw = -(v, w) + v \times w \in \mathbb{R} \oplus im(\mathbb{H}) ,$$

gdzie (v, w) oznacza iloczyn skalarny, a $v \times w$ iloczyn wektorowy.

5 Rozważyć przekształcenie $\mathbb{H}^* \supset S^3 \to Aut(im(\mathbb{H}))$ zadane przez sprzęganie. Opisać jądro i obraz.

6 Definiujemy macierz $J_n \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ jako macierz blokową

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} ,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową $n \times n$.
Niech

$$G = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^{-1}J_nA = J_n \} .$$

Równanie $A^{-1}J_nA = J_n$ można przepisać jak

$$J_nA = AJ_n .$$

Zatem G jest to zbiór automorfizmów przemiennych z J_n. Jeśli $\mathbb{C}^n$ utożsamić z $\mathbb{R}^{2n}$ z bazą

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, i\varepsilon_1, i\varepsilon_2, \ldots, i\varepsilon_n,$$

to G składa się z $\mathbb{R}$-liniowych automorfizmów przemiennych z mnożeniem przez $i \in \mathbb{C}$.
Zatem $G = GL_n(\mathbb{C})$.
Udowodnić

$$SO(2n) \cap Sp_n(\mathbb{R}) = SO(2n) \cap GL_n(\mathbb{C}) = GL_n(\mathbb{C}) \cap Sp_n(\mathbb{R}) = U(n) .$$