1 Kwaterniony

1.1 $SU(2) \simeq S^3$ (pierwsza kolumna jest dowolnym wektorem jednostkowym w $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, a druga postaci $(-\overline{b}, \overline{a})$)

1.2 Niech

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbiór $\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ jest grupą ze względu na mnożenie macierzy:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \mathbf{i}\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\,\mathbf{k} = -\mathbf{k}\,\mathbf{j} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

1.3 Przestrzeń kwaternionów ($\mathbb{H}$ od Hamiltona)

$$\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$$

oraz kwaterniony czysto urojone

$$im\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}.$$

Tak jak poprzednio x^* oznacza $\overline{x}^T$. Dla kwaternionów czysto urojonych $x^* = -x$. ,,*” nazywamy sprzężeniem kwaternionowym.

1.4 Mamy $(xy)^* = x^*y^*$, bo to zachodzi dla bazy pochodzącej z $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

1.5 Dla $x \in \mathbb{H}$ mamy $x \cdot x^* \in \mathbb{R}_+$. Definiujemy $||x|| = \sqrt{x \cdot x^*}$. Dla $x = a\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mamy $||x|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

1.6 Mamy $||xy|| = ||x||\,||y||$.

1.7 Algebra z dzieleniem nad $\mathbb{K}$, to taka algebra nad $\mathbb{K}$ z jedynką, że każdy element różny od 0 jest odwracalny.

1.8 Każdy kwaternion niezerowy jest odwracalny $x^{-1} = x^*/||x||^2$, czyli kwaterniony są algebrą z dzieleniem nad $\mathbb{R}$.

1.9 Twierdzenie Freudenthala (bez dowodu): Jedyne skończenie wymiarowe algebry z dzieleniem nad $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$.

1.10 Kwaterniony o normie jeden to macierze spełniające $xx^* = 1$. Zatem to są macierze z $SU(2)$. Stąd $\mathbb{H} = \mathbb{R}_+ \cdot SU(2) \cup \{0\}$.

1.11 Iloczyn skalarny w przestrzeni kwaternionów czysto urojonych $(x, y) := -re(xy)$.

1.12 Przyjmujemy orientacje w $im\mathbb{H}$, tak aby $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ była bazą dodatnio zorientowaną. Dla kwaternionów czysto urojonych mamy

$$x \cdot y = -(x, y) + x \times y.$$

1.13 Dla dowolnego jednostkowego kwaternionu $x \in SU(2)$ przekształcenie $im\mathbb{H} \ni y \mapsto xyx^* \in im\mathbb{H}$ jest izometrią. Stąd otrzymujemy przekształcenie $SU(2) \to SO(3) \subset GL(im\mathbb{H})$.

1.14 Obrót wokół ustalonej osi o $t \in 2\pi$ podniesiony do $SU(2)$ nie jest identycznością. Ale obrót o 4π podniesiony do $SU(2)$ jest identycznością.
(Parz w YouTubie ,,2 pi rotation is not an identity”, ,,Your palm is a spinor” itp.)

1.15 Geometrycznie przekształcenie zadane przez $x = \cos(t) + \sin(t)\ell$ dla czysto urojonego kwaternionu jednostkowego ℓ jest obrotem wokół ℓ o kąt $2t$.
Dow: rachunek osobno dla $y \in lin\,\ell$ i $y \in lin\,\ell^\perp$.

1.16 Powyższe przekształcenie $SU(2) \to SO(3)$ jest ,,na", 2 do 1, jądrem jest $\{I, -I\}$.

1.17 W $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (i oktonionach $\mathbb{O}$) są spełnione:
1. $a \cdot a^* = a^* \cdot a = ||a||^2 \mathbb{1}$
2. $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$
3. $a + a^* \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$
4. $re(a \cdot b) = re(b \cdot a)$, gdzie re zdefiniowane jako rzut na $lin(\mathbb{1})$
5. $re(a \cdot (b \cdot c)) = re((a \cdot b) \cdot c)$ (to jest spełnione w $\mathbb{H}$, bo kwaterniony są łączne).

Powyższe własności są spełnione w tzw algebrach Hurwitza ,,composition algebra",
patrz http://en.wikipedia.org/wiki/Hurwitz's_theorem_(composition_algebras)
Są to skończeniewymiarowe algebry z jedynką, niekoniecznie łączne wyposażone w dodatnio określaoną formę kwadratową formę q, $q(a) = ||a||^2$ spełniającą $q(a \cdot b) = q(a)q(b)$. Forma kwadratowa zadaje iloczyn skalarny, sprzężenie jest zdefiniowane jako symetria względem $lin(\mathbb{1})$, część rzeczywista $re(a)$ to rzutowanie na $lin(\mathbb{1})$. Czyli wszystko jest zdefiniowane za pomocą formy kwadratowej. Ponadto
$(ab, ab) = (a, a)(b, b)$
$2(a, b)(c, d) = (ac, bd) + (ad, bc)$
Tw Hurwitza mówi, że jedyne algebry Hurwitza z dzieleniem nad $\mathbb{R}$ (z dokładnością do izomorfizmu) to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$.

1.18 Dodatek: Związki z polami wektorowymi na sferze: jeśli w $\mathbb{R}^{n+1}$ jest struktura algebry z dzieleniem, to na S^n jest n liniowo niezależnych pól:
Dow. Wybieramy iloczyn skalarny w R^{n+1}. Niech $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ będzie jedynką algebry. Dobieramy elementy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ stanowiące bazę $lin\{\mathbb{1}\}^\perp$. Wtedy dla każdego $g \in S^n$ elementy $g, gv_1, gv_2, \ldots, gv_n$ stanowią bazę $\mathbb{R}^{n+1}$. Niech π_g będzie rzutowaniem na $lin\{g\}^\perp$. Wektory $v_i(g) = \pi_g(gv_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots n$ stanowią bazę $lin\{g\}^\perp$. To są pola wektorowe na S^n, ciągłe w zależności od $g \in S^n$ i liniowo niezależne.

Z tw. o zaczesywaniu sfery S^2 (nie ma ani jednego nigdzie nie znikającego pola) widzimy, że w $\mathbb{R}^3$ nie ma struktury algebry z dzieleniem.