Grupy i Algebry Liego — zadania na 13-go czerwca

(ostatnia szansa na punkty za ćwiczenia)

Notacja dotycząca algebr Clifforfa jest taka jak w moich notatkach, tzn jak w podręczniku Bröcker-tom Dieck §I.6

Zadanie 1 Niech $x \in \Gamma_n$ będzie elementem grupy Clifforda. Udowodnić, że $\alpha(x)$ i $t(x)$ też należą do grupy Γ_n.

Zadanie 2 Niech $\bar{x} = t(\alpha(x))$. Udowodnić, że dla $x \in \Gamma_n$ mamy $\bar{x}x = x\bar{x}$.

Zadanie 3 Udowodnić, że norma $N(x) = \bar{x}x$ zadaje homomorfizm $N : \Gamma_n \to \mathbb{R}^*$.

Zadanie 4 Udowodnić, że algebra Clifforda $C(3) = C(\mathbb{R}^3, -standard)$ jest izomorficzna z $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ (z mnożeniem po współrzędnych).

Zadanie 5 [2-periodyczność nad $\mathbb{C}$] Niech $C_{\mathbb{C}}(n) = C(\mathbb{C}^n, -standard)$ będzie algebrą Clifforda nad ciałem $\mathbb{C}$. Dla algebry A przez $M_{2\times 2}(A)$ oznaczamy algebrę macierzy 2×2 o współczynnikach z A. Udowodnić

$$C_{\mathbb{C}}(1) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,,$$

$$C_{\mathbb{C}}(n+2) \simeq M_{2\times 2}(C_{\mathbb{C}}(n))\,.$$

Zadanie 6 Niech $V = W \oplus W^* \simeq \mathbb{C}^{2n}$. Rozważamy reprezentacje spinorowe $\wedge^{ev}W$ i $\wedge^{odd}W$ algebry $\mathfrak{so}(n,n) \simeq \mathfrak{so}(2n)$. Znaleźć wagi tych reprezentacji. Patrz [Fulton-Harris] Proposition 20.15.

Zadanie 7 Skonstruować reprezentację algebry $\mathfrak{so}(2n+1)$ o najwyższej wadze $\frac{1}{2}(L_1 + L_2 + \cdots + L_n)$. Patrz [Fulton-Harris] Proposition 20.16.