Grupy i Algebry Liego — zadania na 23go maja

(zadania zaległe)
Z zeszłego tygodnia druga połowa 5, zad 6.

(zadania nowe)

Zadanie 1 Dla funkcji n zmiennych $t_1, t_2, \ldots, t_n$ udowodnić, że
a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t_i x} \in \mathbb{Z}[t_1, t_2, \ldots, t_n][[x]]$$

b) Dla $k > 0$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i e_i h_{k-i} = 0$$

Zadanie 2 Dla $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$ znaleźć ogólną postać wag dominujących. Znaleźć tzw wagi fundamentalne $w_1,\ w_2 \in P$ o tej własności, że każda waga $\lambda \in P_+$ jest nieujemną kombinacją wag w_1 i w_2. Znaleźć reprezentacje o wagach najwyższych w_1 i w_2. Obliczyć ich charaktery.

Zadanie 3 Dla $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ oraz wagi $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ opisać wszystkie podmoduły modułu Vermy M_λ.

Zadanie 4 Dla $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ oraz wag $\lambda, \mu \in \mathfrak{t}^*$ znaleźć wymiar przestrzeni wagowej $M_\lambda[\mu]$ w module Vermy.

Zadanie 5 Filtracja algebry tensorowej $T(\mathfrak{g})$ długością tensorów indukuje filtrację w $U(\mathfrak{g})$, oznaczaną $F_i U(\mathfrak{g})$. Niech

$$Gr_F U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} F_i U(\mathfrak{g}) / F_{i-1} U(\mathfrak{g})\,.$$

Pokazać, że produkt w $U(\mathfrak{g})$ zadaje mnożenie w $Gr_F U(\mathfrak{g})$. Udowodnić, że

$$Gr_F U(\mathfrak{g}) \simeq \bigoplus_{i=0}^{\infty} Sym^i(\mathfrak{g})$$

jako algebry z gradacją.

Zadanie 6 Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Lie. Wskazać algebrę łączną $\mathcal{A}$ nad pierścieniem[1] $\mathbb{C}[\hbar]$, taką że dla specjalizacji $\hbar = 0$ algebra $\mathcal{A}_{\hbar:=0}$ jest przemienna i jest algebrą wielomianów, a dla $a \neq 0$ mamy $\mathcal{A}_{\hbar:=a} \simeq U(\mathfrak{g})$.

[1] Równoważnie: Mnożenie $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ zależy wielomianowo od $\hbar$.