Grupy i Algebry Liego — zadania na 16go maja

(zadania zaległe)

Zadanie 1 Niech W będzie grupą Weyla dla $Sp(n)$ (lub $SO(2n+1)$). Wykazać, że W jest produktem półprostym $\mathbb{Z}_2^n \rtimes \Sigma_n$. Tu Σ_n jest grupą permutacji. Bycie produktem półprostym oznacza, że mamy ciąg dokładny

$$0 \to \mathbb{Z}_2^n \to W \to \Sigma_n \to 0$$

oraz rozszczepienie $\Sigma_n \hookrightarrow W$. Wskazać zanurzenie W do $GL_n(\mathbb{Z})$. Wskazać generatory odpowiadające wierzchołkom diagramu Dynkina.

Zadanie 2 Dany system pierwiastków $\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \sqcup \mathcal{R}_-$. Niech

$$\rho = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \alpha\,.$$

Udowodnić, że dla każdego $\alpha \in \mathcal{R}$

$$2\frac{(\alpha,\rho)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}\,.$$

Ponadto ρ należy do dodatniej komnaty Weyla.

- Dla $SL_n(\mathbb{C})$ (równoważnie dla $SU(n)$) wyrazić ρ za pomocą charakterów bazowych $L_i \in \mathfrak{t}^*$.

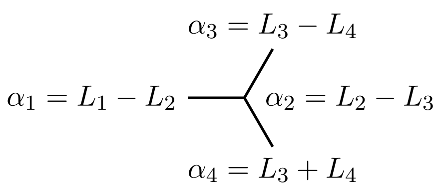
(Zadania nowe)

Zadanie 3 Opisać kraty P, Q i $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ dla grupy $SO(n)$.

Zadanie 4 Niech $X_i,\ Y_i \in \mathfrak{g}_2$, $i = 1, \ldots 6$ będą takie jak na wykładzie lub w podręczniku Fultona-Harrisa. Obliczyć $[X_5, Y_4]$.

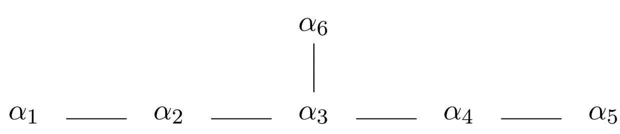
Zadanie 5 Ustalamy $n \geqslant 2$. (Dla wygody można przyjąć $n = 2$.) Niech A będzie macierzą $n \times n$ z jedynkami na antydiagonali i zerami w pozostałych miejscach oraz niech Q będzie macierzą $2n \times 2n$ blokowej postaci $\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix}$. Niech $T \subset SL_{2n}(\mathbb{C})$ będzie standardowym torusem składającym się z macierzy diagonalnych. Definiujemy automorfizm grupy $SL_{2n}(\mathbb{C})$ wzorem $\psi(X) = J(X^T)^{-1}J^{-1}$.
(a) Opisać wzorem indukowany automorfizm algebr Liego i zauważyć, że zachowuje on macierze diagonalne (czyli $\mathfrak{t}$ przy standardowy wyborze).
(b) Zauważyć, że standardowe pierwiastki proste są permutowane.
(c) Niech $G = SL_{2n}(\mathbb{C})^\psi$ będzie podgrupą punktów stałych automorfizmu ψ. Sprawdzić, że $T_G = T \cap G$ jest torusem maksymalnym w G. Znaleźć pierwiastki.
(d) Mamy $\mathfrak{t}_G \subset \mathfrak{t}$ i surjekcję $\mathfrak{t}^* \to \mathfrak{t}^*_G$. Porównać obrazy pierwiastków SL_{2n} z pierwiastkami G.
(e) Obliczyć kopierwiastki $\alpha^\vee = 2\frac{(\alpha,-)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathfrak{t}_G$ i wyrazić je za pomocą kopierwiastków SL_{2n}.

Zadanie 6 (a) Dany jest system pierwiastków D_4



Niech $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4$, $\beta_2 = \alpha_2$. Obliczyć kąt $\angle(\beta_1, \beta_2)$.

(b) Dany jest diagram Dynkina E_6



Niech $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_5$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_4$, $\beta_3 = \alpha_3$, $\beta_4 = \alpha_6$. Obliczyć kąty między tymi wektorami i skonstatować, że wektory $\{\beta_i\}_{i=1,\ldots 4}$ mają kąty i proporcje długości takie, jak pierwiastki proste z systemu F_4.