Grupy i Algebry Liego — zadania na 9go maja

Zadanie 1 Udowodnić, że następujące warunki są równoważne dla zwartej grupy Lie o skończonym centrum:
(1) algebra Liego nie zawiera właściwego ideału
(2) reprezentacja dołączona jest prosta
(3) diagram Dynkina jest spójny

Zadanie 2 Udowodnić, że jeśli diagram Dynkina jest spójny i zawiera potrójną krawędź, to test typu G_2.

Zadanie 3 Niech W będzie grupą Weyla dla $Sp(n)$ (lub $SO(2n+1)$). Wykazać, że W jest produktem półprostym $\mathbb{Z}_2^n \rtimes \Sigma_n$. Tu Σ_n jest grupą permutacji. Bycie produktem półprostym oznacza, że mamy ciąg dokładny

$$0 \to \mathbb{Z}_2^n \to W \to \Sigma_n \to 0$$

oraz rozszczepienie $\Sigma_n \hookrightarrow W$. Wskazać zanurzenie W do $GL_n(\mathbb{Z})$. Wskazać generatory odpowiadające wierzchołkom diagramu Dynkina.

Zadanie 4 Niech W będzie grupą Weyla dla $SO(2n)$. Wykazać, że W jest produktem półprostym $\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes \Sigma_n$. Wskazać zanurzenie W do $GL_n(\mathbb{Z})$. Wskazać generatory odpowiadające wierzchołkom diagramu Dynkina.

Zadanie 5 Dany system pierwiastków $\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \sqcup \mathcal{R}_-$. Niech

$$\rho = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \alpha\,.$$

Udowodnić, że dla każdego $\alpha \in \mathcal{R}$

$$2\frac{(\alpha,\rho)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}\,.$$

Ponadto ρ należy do dodatniej komnaty Weyla.

- Dla $SU(n)$ wyrazić ρ za pomocą charakterów bazowych $L_i \in \mathfrak{t}^*$.