

Grupy i Algebry Liego — zadania na 25 kwietnia

Zadanie 1 Znaleźć jawny wzór na formę Killinga dla \mathfrak{gl}_n za pomocą wyrazów macierzy.

Wskazówka (którą trzeba udowodnić): dla \mathfrak{sl}_n forma Killinga jest równa $(x, y) \mapsto 2n \operatorname{tr}(xy)$.

Zadanie 2 Wykazać, że h_α nie zależy od wyboru iloczynu skalarnego. (Patrz definicja 8.7 z wykładu.)

Wskazówka: najpierw wykazać w przypadku, gdy \mathfrak{g} jest prosta (nie zawiera właściwych ideałów).

Zadanie 3 Niech V będzie reprezentacją definiującą dla $SL_3(\mathbb{C})$.

Roważyć reprezentację $Sym^2(V) \otimes V^*$. Wskazać nietrywialne przekształcenie do V . Czy jądro jest nieprzywiedlną reprezentacją?

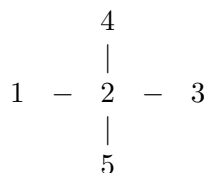
Zadanie 4 Rozważamy reprezentacje $SL_3(\mathbb{C})$. Wiemy, że $V \otimes V \simeq Sym^2V \oplus \wedge^2V$. Rozłożyć $V \otimes V \otimes V$ na reprezentacje nieprzywiedlne.

Następujące zadania są krokami prowadzącymi do opisu wszystkich możliwych systemów pierwiastków. Chodzi o wykluczenie pewnych konfiguracji.

Zadanie 5 Niech v_1, v_2, \dots, v_n będą liniowo niezależnymi wektorami o tej samej długości. Załóżmy, że dla $i \neq j$ albo $v_i \perp v_j$, albo kąt pomiędzy v_i a v_j jest równy 120° . Tworzymy graf o n wierzchołkach. Rysujemy krawędź, jeśli między wierzchołkami, jeśli kąt pomiędzy odpowiadającymi im wektorami jest 120° . Udowodnić, że ten graf ma co najwyżej $n - 1$ krawędzi. Udowodnić, że ten graf nie ma cykli.

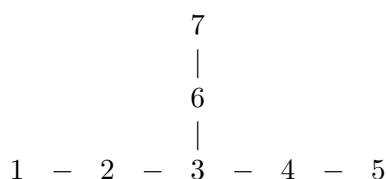
Wskazówka: Obliczyć $(\sum v_i, \sum v_i)$.

Zadanie 6 a) Rozważmy graf



Udowodnić, że nie istnieje system pierwiastków zawierający liniowo niezależne wektory równej długości $v_i, i = 1, 2, \dots, 5$, o tej własności, że kąt pomiędzy v_i a v_j jest równy 120° jeśli jest krawędź w diagramie pomiędzy i a j , a w przeciwnym przypadku są prostopadłe.

b) Rozważmy graf



Udowodnić, że nie istnieje system pierwiastków zawierający liniowo niezależne wektory równej długości $v_i, i = 1, 2, \dots, 7$, o tej własności, że kąt pomiędzy v_i a v_j jest równy 120° jeśli jest krawędź w diagramie, a w przeciwnym przypadku są prostopadłe.