Grupy i Algebry Liego — zadania na 18 kwietnia

Zadanie 0. z zeszłego tygodnia. Wskazać nietrywialne przekształcenia
a) $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$
d) $Sp_2(\mathbb{C}) \to SO_5(\mathbb{C})$
Opisać te odwzorowania w obcięciu do torusa maksymalnego

Wskazówki:
a) $\mathbb{C}^3 \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$
d) Niech $\omega \in \wedge^2(\mathbb{C}^4)^*$ będzie symplektyczną 2-formą w $\mathbb{C}^4$, $ker\Big(\wedge^2(\mathbb{C}^4)^* \stackrel{\wedge\omega}{\to} \wedge^4(\mathbb{C}^4)^*\Big) \simeq \mathbb{C}^5 \ldots$

Zadanie 1 Niech $\rho_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$ and $\rho_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami algebry Liego $\mathfrak{g}$. Definiujemy przekształcenie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ na tensorach prostych wzorem

$$\rho(X)(v \otimes w) = \rho_1(X)v \otimes w + v \otimes \rho_2(X)w\,.$$

Sprawdzić, że tak określone przekształcenie liniowe jest przekształceniem algebr Liego.

Zadanie 2 Mówimy, że iloczyn skalarny w $\mathfrak{g}$ jest ad-niezmienniczy gdy $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$(ad_X Y, Z) + (Y, ad_X Y) = 0\,.$$

a) Przy założeniu, że $\mathfrak{g}$ jest algebrą Lie grupy G wykazać, że jeśli iloczyn skalarny jest Ad niezmienniczy, to jest ad-niezmienniczy
b) Mówimy, że $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{g}$ jest ideałem, jeśli dla każdego $X \in \mathfrak{I}$ i dla każdego $Y \in \mathfrak{g}$ mamy $[X, Y] \in \mathfrak{I}$. (W szczególności $\mathfrak{I}$ jest podalgebrą Lie.) Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{g}$ dopuszcza ad-niezmienniczy iloczyn skalarny, to $\mathfrak{I}^\perp$ jest podalgebrą Liego.

Zadanie 3 Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{g}$ dopuszcza ad-niezmenniczy iloczyn skalarny $(-,-)$ oraz nie zawiera właściwych ideałów, to z dokładnością do proporcjonalności $(-,-)$ jest równy formie Killinga.

Zadanie 4 Które z reprezentacji $Sym_k V$ grupy $SU(2)$ pochodzą od reprezentacji $SO(3)$?
(Tzn dla jakich k homomorfizm $SU(2) \to \mathrm{GL}(Sym^k V)$ faktoryzuje się przez $SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm I\}$?)

Zadanie 5 Niech $V \simeq \mathbb{C}^2$ będzie definiującą reprezentacją dla $SL_2(\mathbb{C})$. Niech $W = Sym^3 V \otimes V$. Wiemy, że $W \simeq Sym^4 V \oplus Sym^2 V$. Wskazać ten izomorfizm znajdując wektory najwyższej wagi dla podreprezentacji.

Zadanie 6 (Ciąg dalszy dla reprezentacji $SL_2(\mathbb{C})$.) Wykazać, że

$$Sym^3(Sym^3(V)) \simeq Sym^9 V \oplus Sym^5 V \oplus Sym^3 V\,.$$

Więcej ciekawych ćwiczeń jest w [Fulton-Harris, roz. 11].