Grupy i Algebry Liego — zadania na 11 kwietnia

Zadanie 1 Niech $G = SO(n)$. Załóżmy, że n jest nieparzyste. Wskazać torus maksymalny i znaleźć tozkład reprezentacji dołączonej $\mathfrak{so}(n) \otimes \mathbb{C}$ na reprezentacje jednowymiarowe.

Wskazówka: $\mathfrak{so}(n) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ jest algebrą Liego grupy

$$SO_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) | A^T A = I\}$$

zachowującej standardową formę 2-liniową niezdegenerowaną. Zamienć wzpółrzędne, tak by forma 2-liniowa miała macierz $\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ w nowej bazie. Wskazać torus zawarty w macierzach diagonalnych. Aby przekonać się, że jest maksymalny trzeba sprawdzić, że $\mathfrak{g}^T = \mathfrak{t}$. Przy okazji rozłożyć $\mathfrak{so}(n) \otimes \mathbb{C}$ na jednowymiarowe reprezentacje torusa. Wypisać charaktery.

Zadanie 2 Wykazać, że zwarte i spójne rozmaitości zespolone, będące zespolonymi grupami Lie (tzn mnożenie i odwrotność są holomorficzne) są przemienne.

Wskazówka: zbadać reprezentację dołączoną: $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$

Zadanie 3 Niech $\varphi : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \times M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ będzie zadane formułą

$$\varphi(A, B) = Tr(AB)\,.$$

Wykazać, że φ jest 2-liniową niezdegenerowaną formą symetryczną.
Sprawdzić, że $\varphi_{|\mathfrak{u}(n)\times\mathfrak{u}(n)}$ jest ujemnie określona oraz $\varphi_{|i\mathfrak{u}(n)\times i\mathfrak{u}(n)}$ jest dodatnio określona.

Zadanie 4 Forma Killinga: Niech G będzie grupą Lie. Różniczka reprezentacji dołączonej

$$Ad : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

jest oznaczana przez

$$ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})\,,$$
$$X \mapsto ad_X\,.$$

Definiujemy symetryczną formę 2-liniową

$$\varphi(X, Y) = tr(ad_X \circ ad_Y)\,.$$

Udowodnić, że jeśli G jest zwarta i centrum G jest skończone, to φ jest ujemnie określona.

Zadanie 5 Wskazać nietrywialne przekształcenia
a) $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$
b) $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \to SO_4(\mathbb{C})$
c) $SL_4(\mathbb{C}) \to SO_6(\mathbb{C})$
d) $Sp_2(\mathbb{C}) \to SO_5(\mathbb{C})$
(powyższe przekształcenia indukują izomorfizmy algebr Lie)

Wskazówki:
a) $\mathbb{C}^3 \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$
b) Utożsamić $\mathbb{C}^4 = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ z formą kwadratową $\det : M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$
c) Utożsamić $\mathbb{C}^6 \simeq \wedge^2\mathbb{C}^4$ z formą kwadratową ...
d) Niech $\omega \in \wedge^2(\mathbb{C}^4)^*$ będzie antysymplektyczną 2-formą w $\mathbb{C}^4$, $ker\Big(\wedge^2 (\mathbb{C}^4)^* \stackrel{\wedge\omega}{\to} \wedge^4(\mathbb{C}^4)^*\Big) \simeq \mathbb{C}^5$ ...