

Grupy i Algebry Liego — egzamin pisemny

Proszę podpisać kartki i podać rozwiązania z krótkimi uzasadnieniami.

Zad. 1 W zwartej grupie $SO(7) \subset GL_7(\mathbb{R})$ wskazać torus maksymalny.

Zad. 2 Rozważmy odwzorowanie $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$. Wyrazić $\exp(tX)\exp(-tY)\exp(-tX)\exp(tY) + \mathcal{O}(t^3)$ za pomocą $[X, Y]$.

Zad. 3 Niech $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ będzie reprezentacją grupy zwartej, oraz ψ indukowaną reprezentacją G na $End(V)$. Wyrazić charakter ψ za pomocą charakteru φ .

Zad. 4 Wskazać przykład spójnej grupy Lie oraz jej reprezentacji, która nie jest półprosta (zawiera podreprezentację, która nie jest składnikiem prostym).

Zad. 5 Przypuśćmy, że $f(t) = t^{-2} + 2t + t^5$ jest charakterem pewnej reprezentacji $\mathbb{C}^* \rightarrow GL(V)$. Znaleźć charakter indukowanej reprezentacji $\wedge^2 V$.

Zad. 6 Rozważmy torus maksymalny $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ w $SL_2(\mathbb{C})$. Czy funkcja

$$f(t) = t^{-3} + 2t^{-2} + t^{-1} + 1 + t + 2t^2 + t^3$$

jest charakterem pewnej reprezentacji $SL_2(\mathbb{C})$? Czy jest różnicą dwóch charakterów.

Zad. 7 Wskazać epimorfizm $Sp_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_5(\mathbb{C})$

Zad. 8 Znaleźć największe $n \in \mathbb{Z}$ takie, że G_2 zawiera podgrupę izomorficzną z $SU(n)$.

Zad. 9 Niech α, β będą pierwiastkami prostymi grupy G_2 , $|\alpha| > |\beta|$. Oraz niech $X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_\beta$. Wskazać jak najmniejsze $n > 0$ takie, że $(ad_Y)^n(X) = 0$.

Zad. 10 Opisać grupę Weyla $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$ przez generatory i relacje. Ile ma ona elementów. Czy jest to jedna z dobrze znanych grup badanych na podstawowym kursie algebry?

Zad. 11 Obliczyć $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \alpha$ za pomocą pierwiastków prostych dla $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$.

Zad. 12 Z aksjomatów systemu pierwiastków wywnioskować jakie mogą być kąty pomiędzy pierwiastkami.

Zad. 13 Rozważamy reprezentacje $\mathfrak{sp}_7(\mathbb{C})$. Wskazać reprezentację zawierającą V_λ o najwyższej wadze $\lambda = 3L_1 + L_2$.

Zad. 14 Rozważamy grupę $SL_4(\mathbb{C})$. Niech $Q \subset \mathfrak{t}^*$ będzie kratą rozpiętą przez pierwiastki, a P kratą wag. Znaleźć iloraz P/Q .

Zad. 15 Wypisać rezolwentę Bernsteina-Gelfanda-Gelfanda dla trywialnej reprezentacji algebry $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$.

Zad. 16 Dla $\lambda = 5L_1 + 3L_2 + L_3$ obliczyć charakter reprezentacji $SL_3(\mathbb{C})$.