Kohomologie de Rhama

24 październik 2022*

1 Formy różniczkowe

Formy alternujące

Wszystkie przestrzenie wektorowe są nad $\mathbb{R}$.

Definicja 1.1. k-forma alternująca na p.w. V to k-liniowe przekształcenie $\omega : V^k \to \mathbb{R}$ takie, że

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma \omega(v_1, \ldots, v_k)$$

dla każdej permitacji σ. Niech $L^k_{\mathrm{alt}}(V)$ to zbiór przestrzeń k-form alternujących na V.

Definicja 1.2. *Antysymetryzacja* formy k-liniowej ω to forma alternująca

$$\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} (-1)^\sigma \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

Definicja 1.3. *Iloczyn zewnętrzny* form $\omega \in L^k_{\mathrm{alt}}(V)$ i $\eta \in L^l_{\mathrm{alt}}(V)$ to $\omega \wedge \eta = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \in L^{k+l}_{\mathrm{alt}}(V)$.

Uwaga 1.4. $L^k_{\mathrm{alt}}(V) \cong (\Lambda^k(V))^* \cong \Lambda^k(V^*)$.

Uwaga 1.5. L^k_{alt} jest funktorem kontrawariantnym $\mathbf{Vect} \to \mathbf{Vect}$.

Wiązki liniowe

Definicja 1.6. *Gładka wiązka liniowa* nad rozmaitością M to gładkie przekształcenie rozmaitości $\pi : E \to M$ wraz z gładką strukturą przestrzeni wektorowej na każdym włóknie z lokalną trywializacją.

Przykład 1.7. Wiązka styczna $TM \to M$.

Definicja 1.8. *Gładki przekrój* wiązki. Przestrzeń przekrojów E oznaczamy $\Gamma(E)$; jest to $C^\infty(M)$-moduł.

Definicja 1.9. Funktor $F : \mathbf{Vect} \to \mathbf{Vect}$ jest *gładki* jeśli indukuje gładkie przekształcenia $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(F(V), F(W))$. Podobnie można mówić o gładkich funktorach $\mathbf{Vect}^k \times (\mathbf{Vect}^{op})^l \to \mathbf{Vect}$.

Stwierdzenie 1.10. *Gładki funktor $F : \mathbf{Vect}^k_l \to \mathbf{Vect}$ rozszerza się do funktora na gładkich wiązkach.*

Formy różniczkowe

Wszystkie rozmaitości są zorientowane!

Definicja 1.11. *k-forma* różniczkowa to gładki przekrój wiązki $L^k_{\mathrm{alt}}(TM)$:

$$\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k(T^*M)).$$

Uwaga 1.12. k-forma różniczkowa na $\mathbb{R}^n$ jest dana wzorem

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1, \ldots, i_k} e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_n}.$$

Forma indukowana

Definicja 1.13. Niech $f : M \to N$ będzie przekształceniem gładkim, $\omega \in \Omega^k(N)$. Forma indukowana to $f^*\omega \in \Omega^k(M)$ dana wzorem

$$f^*(\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_p(Tf_p(v_1), \dots, Tf_p(v_n)).$$

Lemat 1.14. *Mamy* $f^*(g^*(\omega)) = (fg)^*(\omega)$ *i* $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

Różniczka

Definicja 1.15. *Różniczka* k-formy $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ dana jest wzorem

$$d(\sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} Df_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}.$$

CDGA

Definicja 1.16. Przemienna algebra różniczkowa z gradacją to kompleks kołańcuchowy (C^n, d) z przemiennym mnożeniem $C^k \otimes C^l \to C^{k+l}$ spełniającym regułę Leibniza:

$$d(xy) = d(x)y + (-1)^{|x|} x d(y).$$

Przykład 1.17. $\Omega^k(M)$.

Stwierdzenie 1.18. *Istnieje dokładnie jedna różniczka d na $\Omega^*(M)$ taka, że $d : C^\infty \cong \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ jest zwykłym różniczkowaniem.*

Uwaga 1.19. Jeśli R jest algebrą przemienną, to możemy skonstruować CDGA generowaną przez symbole df $(f \in R)$ i relacje $d1 = 0$, $d(f + g) = df + dg$ i formułę Leibniza. Jest to lewy dołączony do zapominania.

Kohomologie de Rhama

Definicja 1.20. *Kohomologie de Rhama* rozmaitości M to kohomologie kompleksu kołańcuchowego

$$0 \to \Omega^0(M) \to \Omega^1(M) \to \dots$$

Przykład 1.21. Kohomologie $\mathbb{R}$ i S^1.

Lemat 1.22 (Lemat Poincare)**.** $H^*(M) \cong H^*(M \times \mathbb{R})$.

Dowód. Tylko szkic. □

Wniosek 1.23. *Jeśli $f, g : M \to N$ są gładko homotopijne, to $f^* = g^*$.*

Definicja 1.24. Kohomologie o zwartych nośnikach. Przykład: $H_c^*(\mathbb{R})$.

Lemat 1.25. *Jeśli $U, V \subseteq M$ otwarte podzbiory, to istnieją ciągi dokładne kompleksów*

$$0 \to \Omega^*(U \cup V) \xrightarrow{(+,+)} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{(+,-)} \Omega^*(U \cap V) \to 0.$$

$$0 \to \Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{(+,-)} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{(+,+)} \Omega_c^*(U \cup V) \to 0.$$

Dowód. Epimorfizm w pierwszym z rozkładu jedności. □

Twierdzenie 1.26 (Dualność Poincare)**.** *Dla rozmaitości M, przekształcenie*

$$\Omega^k(M) \otimes \Omega_c^{n-k}(M) \ni (\omega, \eta) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

zadaje izomorfizm $H^k(M) \simeq (H^{n-k}(M))^*$.

Snopy

Definicja 1.27. *Presnop* M to functor z kategorii otwartych podziorów M do kategorii przestrzeni wekotorowych.

Definicja 1.28. Presnop F na M jest *snopem* jeśli każda zgodna rodzina przekrojów przedłuża się jednoznacznie oraz $F(\varnothing) = 0$.

Przykład 1.29. Snop stały. Przekroje wiązki wektorowej.

Uwaga 1.30. Snopy nad ustaloną przestrzenią tworzą kategorię abelową. Zdefiniować jądro.

Definicja 1.31. Snop I nad X nazywamy *injektywnym* jeśli dla każdego monomorfizmu snopów $A \to B$ przekształcenie $\mathrm{Hom}(B, I) \to \mathrm{Hom}(A, I)$ jest epi.

Definicja 1.32. Niech X będzie przestrzenią i niech A będzie snopem nad X. *Kohomologie* $H^*(X; A)$ to kohomologie rezolwenty injektywnej A. Taka rezolwenta zawsze istnieje.

Tw. de Rhama

Twierdzenie 1.33. $H^*_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^*(M; \mathbb{R})$.

Dowód. Snop $\Omega^*(-)$ jest rezolwentą acykliczną (miękką) snopa stałego. Można z niej liczyć kohomologie snopowe. ☐

Całkowanie

Definicja 1.34. Całka z n-formy na zwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$: wiadomo. W ogólnym przypadku: bierzemy rozkład jedności i sumujemy całki po mapach. Jeśli ω jest k-formą a $N \subseteq M$ jest podrozmaitością, to

$$\int_N \omega := \int_N (N \subseteq M)^* \omega.$$

Definicja 1.35. Każda zwarta rozmaitość $K^k \subseteq M^n$ zadaje funkcjonał

$$\Omega^k(M) \ni \omega \mapsto \int_N \omega \in \mathbb{R},$$

który definiuje element $[K] \in (H^k(M))^* \cong H^{n-k}(M)$. Jeśli M nie jest zwarta, bierzemy formy o zwartych nośnikach.

Uwaga 1.36. Dla rozmaitości zespolonych formy o współczynnikach C^∞ będziemy oznaczać przez $A^*(M)$, rezerwując oznaczanie $\Omega^*(M)$ dla form o holomorficznych współczynnikach.