Complex Manifolds - problem list no. 4 - zadania na 14.11

1 Niech Q będzie zespoloną formą dwuliniową na $\mathbb{C}^n$. Utożsamiamy $\mathbb{C}^n$ z $\mathbb{R}^{2n}$. Udowodnić, że jeśli $v \in \mathbb{R}^{2n}$ jest wektorem własnym części rzeczywistej $\operatorname{Re} Q$ o wartości własnej λ to iv jest wektorem własnym dla wartości $-\lambda$.

(Uwaga: wektor v jest wektorem własnym formy dwuliniowej B jeśli dla każdego w mamy $B(v,w) = \lambda\langle v, w\rangle$. W naszym przypadku zakładamy, że iloczyn skalarny jest niezmienniczy ze względu na mnożenie przez i, tzn $\langle iv, iw\rangle = \langle v, w\rangle$)

2 Niech $X = \{z \in \mathbb{C}^n \ : \ \sum_{k=1}^n z_k^2 = 1\}$. Wykazać, że zbiór X jest homotopijnie równoważny ze sferą S^{n-1}. (A nawet jest homeomorficzny z przestrzenią styczną TS^{n-1}.)

3 Niech $X = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \ : \ 2x^3 - 6x - 3y^2 = 0\}$ oraz $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \operatorname{Re} y$. Czy punkty krytyczne f są niezdegenerowane (tzn czy jeśli $D(f) = 0$ to $D^2(f)$ jest niezdegenerowana)? Jakie są indeksy?

4 Niech $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{R}$ będzie zadane formułą

$$f([z_0 : z_1 : \cdots : z_n]) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{|z_k|^2}{||z||^2} .$$

Wykazać, że f ma niezdegenerowane punkty krytyczne i obliczyć ich indeksy.

5 Referat dla S.S.: Opisać rozkład grassmanianu na komórki algebraiczne

$$Gr_k(\mathbb{C}^n) = \bigsqcup_{\lambda \in ??} \mathbb{C}^{n_\lambda} .$$

[Griffiths-Harris, Principles of Algebraic Geometry, roz I.5 str 193-7]