Complex Manifolds - problem list no. 11 - zadania na 16.01.2023

1 Definiujemy wielomiany $\sigma_n : Macierze(n \times n) \to \mathbb{C}$ wzorem

$$\sum \sigma_k(X) t^{n-k} = \det(X + tI)\,.$$

Wykazać, że każdy Ad-niezmienniczy wielomian na przesstzrni macierzy można wyrazić za pomocą wielomianów σ_n.

2 Niech E będzie wiązką zespoloną rangi n (nad dowolną bazą).
(a) Udowodnić $c_1(E) = c_1(\Lambda^n E)$.
(b) Załóżmy, że $n = 3$, wyrazić klasy Cherna wiązki $\Lambda^2 E$ za pomocą klas Cherna E.
Wskazówka: Zastosować zasadę rozszczepienia i wzór Whitneya.

3 Niech E będzie wiązką holomorficzną nad bazą, która jest rozmaitością zespoloną, $rk(E) = r$. Niech $s : X \to E$ będzie holomorficznym przekrojem wiązki, oraz $Z(s) \subset X$ zbiorem jego zer.

(a) Zakładając, że s jest transwersalny do przekroju zerowego udowodnić, że klasa Poincaré dualna do $[Z(s)]$ jest równa najwyższej klasie Cherna (tzn $c_r(E)$). Oznacza to, że dla każdej formy α o zwartym nośniku

$$\int_X \alpha \cdot c_r(E) = \int_{Z(s)} \alpha.$$

(b) Uogólnić powyższe stwierdzenie, przy założeniu, że s jest generycznie transwersalne do przekroju zerowego, tzn zbiór punktów nietranswersalności $\Sigma(s)$ jest mniejszego wymiaru niż $Z(s)$.

Wskazówka: Zobaczyć, że w interesującej nas gradacji $H^{2\mathrm{codim} Z(s)}(X) \simeq H^{2\mathrm{codim} Z(s)}(X \setminus \Sigma(s))$.

4 Wykazać, że jeśli wiązka E ma nigdzie nie zerujący się przekrój, to $c_r(E) = 0$. (Bez żadnych założeń o bazie).

5 Referat: Klasa Atiyaha [Huybrechts od 4.2.17 do Prop 4.2.19].