Complex Manifolds - problem list no. 10 - zadania na 9.01.2023

1 Construct a lattice $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ such that $\mathbb{C}^2/\Lambda$ cannot be embedded into a projective space.

Wskazówka: Jeśli M można zanurzyć w $\mathbb{P}^n$, to $\omega_{FS|M}$ pochodzi z $H^2(M;\mathbb{Z})$. Skonstruować taką kratę, by $H^2(M;\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M) = 0$. Dla wygody $\mathbb{Z}$ można zastąpić przez $\mathbb{Q}$. Rozważamy $H^2(M;\mathbb{Z})$, $H^2(M;\mathbb{Q})$, $H^2(M;\mathbb{R})$ jako podgrupy $H^2(M;\mathbb{C})$.

Dokładniejsze wskazówki: Zapiszmy $\beta = \frac{i}{2}\sum_{i,j} a_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$, $a_{i,j} \in \mathbb{C}$. To jest ogólna postać klasy kokohomologii $[\beta] \in H^{1,1}(M) \subset H^2(M;\mathbb{C})$ (ta podprzestrzeń nie zależy od wyboru formy Kählera).
a) Dla jakich $a_{i,j}$ klasa $[\beta] \in H^2(M;\mathbb{R})$?
b) Można założyć, że krata jest rozpięta przez wektory $\alpha_1 = (1,0)$, $\alpha_2 = (0,1)$ oraz α_3 i $\alpha_4 \in \mathbb{C}^2$. Niech $T_{k,\ell} = (\mathbb{R}\alpha_k + \mathbb{R}\alpha_\ell)/(\mathbb{Z}\alpha_k + \mathbb{Z}\alpha_\ell)$. Obliczyć całki $\int_{T_{k,\ell}} \beta$.
c) Zobaczyć, że dla ogólnego wyboru wektorów α_3 i α_4 nie można dobrać współczynników $a_{i,j}$ tak by wszystkie całki $\int_{T_{k,\ell}} \beta$ były wymierne.

2 Compute $H^1(\mathbb{P}^n; \mathscr{O}^*_{\mathbb{P}^n})$ which parametrizes line bundles over $\mathbb{P}^n$. (Hint: Use the exponential exact sequence.)

3 Let $X = Bl_{pt}\mathbb{P}^2$.
a) Construct a Kähler form on X.
b) Find an embedding of X into a projective space.
c) Find all the cohomology classes $[\alpha] \in H^{1,1}(X)$ satisfying $\int_C \alpha > 0$ for all complex curves $C \subset X$ and $\int_X \alpha^2 > 0$. (It is enough to consider $C = E$ – exceptional divisor or $C = H$ – the pullback of a line in $\mathbb{P}^2$.)

Remark: See also *Nakai–Moishezon criterion.*

Podobne pytania można zadać dla $X = \mathbb{P}\Big(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)\Big)$, tj dla powierzchni Hirzebrucha. Jeśli zostanie czas, to zajmiemy się tym.

4 Let E and F be complex vector bundles over a manifold. Let ∇_E and ∇_F be their connections. Construct a connection on the vector bundle $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$.

5 Referat MJ: Opowiedzieć o dualności Serra [Huybrechts: Prop. 4.1.15]