Egzamin poprawkowy z Analizy Funkcjonalnej. 1 marca 2012r.

Zadanie 1. Podać definicję transformaty Fouriera oraz sformułować twierdzenia o transformacie Fouriera jako operatorze liniowym ciągłym.

Zadanie 2. Niech

$$X := \{f \in C([0,\infty)) : \lim_{x\to\infty} xf(x) = 0\}.$$

Czy X z normą supremum jest przestrzenią unormowaną? Czy jest przestrzenią Banacha? Czy jest ośrodkowa? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. Obliczyć normę funkcjonału $(x,y,z) \to x + 2y + 3z$ na przestrzeni R^3 z normą zadaną przez kulę jednostkową $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 \leq 30$.

Zadanie 4. Niech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiega słabo do f w $L^2([0,1])$ oraz $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiega słabo do g w $L^2([0,1])$. Ponadto $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{L^2([0,1])} = \|g\|_{L^2([0,1])}$. Udowodnij, że

$$\int_0^1 f_n g_n \, dx \to \int_0^1 fg \, dx.$$

Zadanie 5. Niech $X := (C([0,2]), \|\cdot\|_\infty)$ oraz $\phi : X \to R$ zdefiniowane będzie następująco

$$\phi(f) := \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx, \quad f \in C([0,2]).$$

(a) Pokazać, że $\phi \in X'$ oraz znaleźć $\|\phi\|$

(b) Wykazać, że nie istnieje $f \in C([0,2])$ spełniające $\|f\|_\infty \leq 1$ i $|\phi(f)| = \|\phi\|$.

Zadanie 6*. Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ niech $x_k \in l^\infty$ taki, że

$$x_k(n) := \begin{cases} 1 & n \leq k, \\ 0 & n > k. \end{cases}$$

Udowodnić, że ciąg $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nie zbiega słabo w l^∞.