Egzamin z Analiy Funkcjonalnej, 05.02.2013

Proszę rozwiązywać zadania na oddzielnych kartkach.

1. (a) Sformułuj twierdzenie o rzucie ortogonalnym.

   (b) Podaj definicję transformaty Fouriera oraz znajdż transformatę Fouriera funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanej następująco

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1), \\ -1 & \text{dla } x \in (-1,0), \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

2. Niech $(X_i, \|\cdot\|_i)$ for $i = 1, \ldots, N$ $(N \in \mathbb{N})$ będzie przestrzenią Banacha, $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ i dla każdego $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $x' = (x'_1, \ldots, x'_N) \in X$ definiujemy $x + x' = (x_1 + x'_1, \ldots, x_N + x'_N)$. Definiujemy również

$$\|\cdot\|_p := \begin{cases} \left[\|\cdot\|_1^p + \cdots + \|\cdot\|_N^p\right]^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1,\ldots,N} \|\cdot\|_i & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

   Udowodnij, że $(X, \|\cdot\|_p)$ jest przestrzenią Banacha.

3. Niech $X = Y = l^2$. Rozważmy $T : D_i \to Y,\ i = 1, 2$ zdefiniowany jako $T((s_n)) = (ns_n)$, gdzie $D_i \subset X,\ i = 1, 2$ są określone w sposób następujący:

   a) $D_1 = \{(s_n) \in l^2 : (ns_n) \in l^2\}$,

   b) $D_2 = \{(s_n) : s_n \neq 0 \text{ dla co najwyzej skończenie wielu } n\}$

   Zbadaj, czy (T, D_1) oraz (T, D_2) są domknięte.

4. Niech H będzie przestrzenią Hilberta nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ oraz niech M będzie domkniętą podprzestrzenią H. Niech $f : M \to \mathbb{R}$ będzie ograniczonym funkcjonałem liniowym. Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden ograniczony funkcjonał liniowy $F : H \to \mathbb{R}$ taki, że

$$F(x) = f(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in M \quad \text{oraz} \quad \|F\| = \|f\|.$$

5. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie otwartym przedziałem ograniczonym oraz $1 < p < \infty$. Niech ponadto $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ będzie funkcją okresową o okresie $T > 0$. Definiujemy $f_n(x) := g(nx)$. Pokazać, że f_n zbiega słabo w $L^p(I)$ do α, gdzie

$$\alpha = \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx.$$