

Dokumentacja

Struktura terminowa stóp procentowych

Adam Ryterski
Marcin Sosnowski

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Opis danych rynkowych	3
2.1	Dane określające waluty i rynki	3
2.2	Kwotowania i konwencje rynkowe dla waluty krajowej	4
2.3	Kwotowania i konwencje rynkowe dla waluty zagranicznej	5
2.4	Metoda interpolacji	5
3	Weryfikacja wprowadzonych danych	5
3.1	Funkcje generujące tablice	6
	cpn_dt(start_date, one_tenor, market, FC, DCC, BDA, Day_to_spot, EMA, cf)	6
	market_ir_gen()	7
	market_fx_gen()	7
4	Krzywa czynników dyskontowych dla waluty krajowej	7
4.1	Funkcje generujące krzywą krajową	9
	rate2df(t, rate, method)	9
	df2rate(t, df, method)	10
	DOM_curve_constr()	10
5	Krzywa czynników dyskontowych dla waluty zagranicznej	10
5.1	Funkcje generująca krzywą zagraniczną	11
	FOR_curve_constr()	11
	base_curr(CURR_FOR, CURR_DOM)	11
6	Opis metod interpolacji	12
6.1	Interpolacja liniowa	12
6.2	Metoda RAW	13
6.3	Natural Cubic Spline	13
6.4	B Spline	14
6.5	Funkcje interpolujące	15
	addinterp(t, DS)	15
	linear_interp(t, x, y)	15
	raw_interp(t, x, y)	15
	nbubs_interp(t, x, y)	16
	bsplines(t,x,y,d)	16
7	Czynniki dyskontowe i stopy forward	16
7.1	Funkcje wyznaczające czynniki dyskontowe i stopy forward	16
	DF_pom(t, DS)	16
	DF(date0, date, DS)	17
	FR(date0, dates1, dates2, DS)	17
	DS_conv(date, DS)	18

1 Wstęp

Niniejsza dokumentacja zawiera opis procedur i funkcji służących do wygenerowania tablic czynników dyskontowych dla waluty krajowej i zagranicznej. Zostały one stworzone przez Adama Ryterskiego w 2011 roku, a następnie zmodyfikowanych przez Marcina Sosnowskiego w 2012 roku. Zawarte zostały także fragmenty pracy Marcina Kolankowskiego z 2010 roku. W dalszej części przyjmujemy następujące oznaczenia:

$DF(t, T)$ - czynnik dyskontowy w chwili t liczony dla momentu T , tzn. ilość kapitału jaki potrzebujemy w chwili t , aby przy strukturze terminowej stóp procentowych opisaną przez czynniki dyskontowe, w chwili $T > t$ uzyskać 1.

$DF(t, T_0, T)$ - czynnik dyskontowy forward, czyli czynnik dyskontowy obserwowalny w chwili t , który sprowadza do chwili T_0 przepływ pieniężny występujący w chwili T .

$R(t, T)$ - zerokuponowa stopa procentowa dla okresu $[t, T]$.

$f(t, S, T)$ - stopa forward w chwili t na okres $[S, T]$.

$F(t_0, T)$ - kurs forward obserwowalny w chwili t_0 na chwilę T .

2 Opis danych rynkowych

Dane rynkowe umożliwiające poprawne działanie programu wprowadzane są przez użytkownika. Dane zapisywane są w pliku `market_data_in.m`, można je podzielić na następujące kategorie:

2.1 Dane określające waluty i rynki

NAZWA ZMIENNEJ	OPIS
<code>CURR_DOM</code>	kod waluty krajowej np. PLN
<code>CURR_FOR</code>	kod waluty zagranicznej np. EUR
<code>FC_DOM</code>	nazwa centrum finansowego, odpowiadającego walucie krajowej np. {"warsaw"}
<code>FC_FOR</code>	nazwa centrum finansowego, odpowiadającego walucie zagranicznej np. {"london"}
<code>start_date</code>	data $t = 0$, moment z którego pochodzą kwotowania rynkowe

2.2 Kwotowania i konwencje rynkowe dla waluty krajowej

NAZWA ZMIENNEJ	OPIS
<i>Depo_DCC</i>	Day Count Convention dla depozytów np. ACT/365
<i>Depo_BDA</i>	Business Day Adjustment dla depozytów np. sfbd
<i>Depo_EMA</i>	End of Month Adjustment dla depozytów np. +1
<i>Depo_day_to_spot</i>	konwencja określająca datę spot na rynku depozytów, wyrażona jako ilość dni roboczych między zawarciem transakcji, a jej rozliczeniem np. 2
<i>Depo_rates</i>	tablica zawierająca kwotowania rynkowe dla depozytów, pierwsza kolumna zawiera oznaczenie depozytu, druga i trzecia odpowiednio cenę kupna (<i>bid</i>) i sprzedaży (<i>ask</i>) np. <div style="text-align: right;"> ON 3.10 3.20 TN 2.73 2.75 ⋮ </div>
<i>FRA_DCC</i>	Day Count Convention dla kontraktów FRA np. ACT/365
<i>FRA_BDA</i>	Business Day Adjustment dla kontraktów FRA np. sfbd
<i>FRA_EMA</i>	End of Month Adjustment dla kontraktów FRA np. +1
<i>FRA_day_to_spot</i>	konwencja określająca datę spot na rynku kontraktów FRA, wyrażona jako ilość dni roboczych między zawarciem transakcji, a jej rozliczeniem np. 2
<i>FRA_rates</i>	tablica zawierająca kwotowania rynkowe dla kontraktów FRA, pierwsza kolumna zawiera oznaczenie kontraktu FRA, druga i trzecia odpowiednio cenę kupna (<i>bid</i>) i sprzedaży (<i>ask</i>) np. <div style="text-align: right;"> 3X6 3.90 3.93 6X9 2.68 2.70 ⋮ </div>
<i>IRS_DCC</i>	Day Count Convention dla kontraktów IRS np. ACT/365
<i>IRS_BDA</i>	Business Day Adjustment dla kontraktów IRS np. sfbd
<i>IRS_EMA</i>	End of Month Adjustment dla kontraktów IRS np. +1
<i>IRS_day_to_spot</i>	konwencja określająca datę spot na rynku kontraktów IRS, wyrażona jako ilość dni roboczych między zawarciem transakcji, a jej rozliczeniem np. 2
<i>IRS_cf</i>	częstotliwość płatności nogi stałej w roku np. 2 gdy kupon nogi stałej wypłacany jest 2 razy w roku
<i>IRS_rates</i>	tablica zawierająca kwotowania rynkowe dla kontraktów IRS, pierwsza kolumna zawiera oznaczenie kontraktu IRS, druga i trzecia odpowiednio cenę kupna (<i>bid</i>) i sprzedaży (<i>ask</i>) np. <div style="text-align: right;"> 3Y 2.28 2.32 4Y 2.60 2.62 ⋮ </div>

2.3 Kwotowania i konwencje rynkowe dla waluty zagranicznej

NAZWA ZMIENNEJ	OPIS
<i>FX_rate</i>	tablica zawierająca kurs spot dla pary walutowej, w pierwszej kolumnie znajduje się cena kupna (<i>bid</i>), w drugiej zaś cena sprzedaży (<i>ask</i>) np. 1.4175 1.418. Przyjmujemy, że kurs walutowy jest ceną waluty bazowej wyrażoną w jednostkach waluty kwotowanej (<i>direct quotation</i>), a rozróżnienie między walutą bazową, a kwotowaną następuje przy użyciu funkcji <i>base_curr</i>
<i>FOR_DCC</i>	Day Count Convention dla kontraktów forward np. ACT/365
<i>FOR_BDA</i>	Business Day Adjustment dla kontraktów forward np. sfbd
<i>FOR_EMA</i>	End of Month Adjustment dla kontraktów forward np. +1
<i>FOR_day_to_spot</i>	konwencja określająca datę spot na rynku kontraktów forward, wyrażona jako ilość dni roboczych między zawarciem transakcji, a jej rozliczeniem np. 2
<i>SWAP_POINTS</i>	tablica zawierająca kwotowania rynkowe punktów swapowych, pierwsza kolumna zawiera oznaczenie kontraktu forward, druga i trzecia odpowiednio cenę kupna (<i>bid</i>) i sprzedaży (<i>ask</i>) np. <div style="text-align: center;"> ON 0.385 0.335 TN 1.250 1.210 ⋮ </div>
<i>pip_val</i>	zmienna określająca wielkość punktu bazowego (<i>pip – price interest point</i>) dla danej pary walutowej np. 0.01 dla USDJPY
<i>PDR</i>	zmienna przyjmuje wartości 1 lub -1 w zależności od tego, czy punkty swapowe powinny zostać odpowiednio dodane lub odjęte od kursu spot

2.4 Metoda interpolacji

NAZWA ZMIENNEJ	OPIS
<i>interp_method</i>	zmienna określająca globalnie przyjętą metodę interpolacji. Zmienna może przyjmować następujące wartości: <i>linear on df</i> , <i>linear on rate</i> , <i>raw</i> , <i>linear on lograte</i> , <i>nat cubic</i>

3 Weryfikacja wprowadzonych danych

W celu zapewnienia użytkownikowi możliwości weryfikacji wprowadzonych danych, po ich wprowadzeniu generowane są tablice *market_ir* i *market_fx*.

W kolumnach tablicy *market_ir* zawarte są kolejno kategoria instrumentu, oznaczenie instrumentu, początek okresu depozytowego, koniec okresu depozytowego, cena kupna (*bid*), cena sprzedaży (*ask*) oraz konwencja DCC. Przykładowa tablica:

DEP	ON	24-aug-2009	25-aug-2009	3.10	3.20	ACT/365
DEP	TN	25-aug-2009	26-aug-2009	2.73	2.73	ACT/365
:	:	:	:	:	:	:
FRA	3X6	26-nov-2009	26-feb-2010	3.90	3.93	ACT/365
FRA	6X9	26-feb-2010	27-may-2010	2.68	2.70	ACT/365
:	:	:	:	:	:	:
IRS	3Y	26-aug-2009	29-aug-2012	2.28	2.32	30/360
IRS	4Y	26-aug-2009	29-aug-2013	2.60	2.62	30/360
:	:	:	:	:	:	:

W kolumnach tablicy *market_fx* zawarte są kolejno data zapadalności kontraktu, cena kupna (*bid*), cena sprzedaży (*ask*) oraz konwencja DCC. Przykładowa tablica:

24-aug-2009	1.4175	1.4180	ACT/360
28-aug-2009	1.4174	1.4179	ACT/360
:	:	:	:

3.1 Funkcje generujące tablice

cpn_dt(start_date, one_tenor, market, FC, DCC, BDA, Day_to_spot, EMA, cf)

Dane wejściowe:

Parametry:

start_date - data w formacie dd-mm-yyyy określająca moment kwotowania instrumentu finansowego; *one_tenor* - oznaczenie instrumentu finansowego np. ON, 3X6; *market* - kategoria instrumentu, do wyboru DEP, FRA, IRS, FWD; *FC* - nazwa centrum finansowego; *DCC* - konwencja Day Count Convection; *BDA* - konwencja Business Day Adjustment; *Day_to_spot* - konwencja spot; *EMA* - konwencja End of Month Adjustment; *cf* (opcjonalnie) - ilość płatności nogi stałej w roku dla kontraktów IRS, domyślnie 1, co oznacza, że dla kontraktów IRS płatność nogi stałej występuje raz w roku

Wynik działania funkcji:

pay_dt - tablica zawierająca kolejno datę spot oraz daty przepływów finansowych związanych z danym instrumentem

pay_fr - tablica z frakcjami roku między datami z tablicy *pay_dt*

Opis działania funkcji:

Funkcja pomocnicza, wykorzystywana przy szukaniu daty rozliczenia oraz dat przepływów finansowych związanych z danym instrumentem. Przykładowe wywołanie funkcji: *[pay_dt, pay_fr] = cpn_dt("24-aug-2009", "3X6", "FRA", "warsaw", "ACT/365", "sfd", 2, "+1")*, zwróci tablicę zawierającą daty *pay_dt = {"26-aug-2009", "26-nov-2009", "26-feb-2009"}*, czyli odpowiednio datę spot, datę spot + 3M oraz datę spot+6M oraz tablicę *pay_fr = [0.25205, 0.25205]* zawierającą frakcje roku pomiędzy tymi datami

market_ir_gen()

Dane wejściowe:

FC_DOM; start_date; Depo_DCC; Depo_BDA; Depo_EMA; Depo_day_to_spot; Depo_rates; FRA_DCC; FRA_BDA; FRA_EMA; FRA_day_to_spot; FRA_rates; IRS_DCC; IRS_BDA; IRS_EMA; IRS_day_to_spot; IRS_cf; IRS_rates

Parametry:

Wynik działania funkcji:

market_ir - tablica opisana we wstępie do rozdziału

market_ir.m - plik zawierający tablicę *market_ir*

Opis działania funkcji:

Funkcja w oparciu o funkcję *cpn_dt* oraz wprowadzone dane, wylicza daty początku i końca okresu depozytowego dla instrumentów finansowych, a następnie tworzy tablicę *market_ir* i zapisuje ją do pliku *market_ir.m*

market_fx_gen()

Dane wejściowe:

FC_FOR; start_date; FOR_DCC; FOR_BDA; FOR_EMA; FOR_day_to_spot; FX_rate; SWAP_POINTS; PDR; pip_val

Parametry:

Wynik działania funkcji:

market_fx - tablica opisana we wstępie do rozdziału

market_fx.m - plik zawierający tablicę *market_fx*

Opis działania funkcji:

Funkcja za pomocą funkcji *cpn_dt* wylicza daty zapadalności kontraktów forward wprowadzonych przez użytkownika. Następnie z kursu spot i punktów swapowych wylicza ceny forward. Opis metodologii wyliczania kursów forward znajduje się w rozdziale 5. Ostatecznie funkcja zwraca wyniki w postaci tablicy *market_fx* i zapisuje ją do pliku *market_fx.m*

4 Krzywa czynników dyskontowych dla waluty krajowej

Krzywą czynników dyskontowych dla waluty krajowej zbudowana jest z trzech części:

Krótki koniec:

Część krzywej zbudowana na podstawie kwotowań rynkowych depozytów. Zakładając, że w chwili t_0 dysponujemy kwotowaniem depozytu $R(t_1, T)$ rozpoczynającego się w chwili t_1 i kończącego w chwili T , czynnik dyskontowy $DF(t_0, T)$ na moment T wyliczamy ze wzoru:

$$DF(t_0, T) = \frac{1}{1 + R(t_1, T) \times (T - t_1)} \times DF(t_0, t_1) \quad (1)$$

Czynnik dyskontowy dla daty spot $DF(t_0, t_1)$ w zależności od wartości zmiennej $Depo_day_to_spot$ wyliczany jest jedną z poniższych metod:

(a) Gdy $Depo_day_to_spot = 0$ to $DF(t_0, t_1) = 1$.

(b) Gdy $Depo_day_to_spot = 1$ to czynnik dyskontowy dla daty spot jest wyliczany z kwotowań depozytu ON za pomocą poniższego wzoru:

$$DF(t_0, t_1) = DF(t_0, t_{ON}) = \frac{1}{1 + R_{ON} \times (t_{ON} - t_0)} \quad (2)$$

(c) Gdy $Depo_day_to_spot \geq 2$ to najpierw wyliczamy czynniki dyskontowe odpowiadające depozytom ON i TN za pomocą poniższych wzorów:

$$DF(t_0, t_{ON}) = \frac{1}{1 + R_{ON} \times (t_{ON} - t_0)} \quad (3)$$

$$DF(t_0, t_{TN}) = \frac{1}{1 + R_{TN} \times (t_{TN} - t_{ON})} \times DF(t_0, t_{ON}) \quad (4)$$

Następnie czynnik dyskontowy spot $DF(t_0, t_1)$ wyliczamy za pomocą interpolacji (ekstrapolacji) globalnie określoną metodą, przy uwzględnieniu punktów węzłowych $(t_0, 1)$, $(t_{ON}, DF(t_0, t_{ON}))$, $(t_{TN}, DF(t_0, t_{TN}))$.

Część środkowa:

Część oparta o kwotowania rynkowe kontraktów FRA. Dla kontrakt FRA $T_1 \times T_2$ o stopie procentowej R_{FRA} , początkowo wyliczany jest czynnik dyskontowy $DF(t_0, T_1)$ na podstawie tablicy czynników dyskontowych otrzymanej z krótkiego końca krzywej (ewentualnie zaktualizowanej o czynniki wyliczone z kontraktów FRA o wcześniejszym terminie zapadalności). Gdy zachodzi konieczność, to użyta jest globalnie określona metoda interpolacji (ekstrapolacji). Ostatecznie wyliczany jest czynnik dyskontowy na moment T_2 , za pomocą wzoru:

$$DF(t_0, T_2) = \frac{DF(t_0, T_1)}{1 + R_{FRA} \times (T_2 - T_1)} \quad (5)$$

Długi koniec:

Ostatnia część krzywej jest zbudowana na podstawie kwotowań kontraktów IRS i wyliczana poprzez bootstrapping czynników dyskontowych. Przykładowo założmy, że w chwili t_0 mamy kontrakt IRS o stopie R_{IRS} płaćcy kupony nogi stałej w chwilach t_1, t_2, \dots, t_n i chwila t_n jest czasem zapadalności kontraktu. Oczywiście wartość kontraktu IRS w chwili jego zawarcia t_0 jest równa 0, więc spełniona jest równość

$$R_{IRS} \sum_{i=1}^n \Delta_i DF(t_0, t_i) + DF(t_0, t_n) = 1, \quad \Delta_i = t_i - t_{i-1} \quad (6)$$

Wówczas po przekształceniu otrzymujemy:

$$DF(t_0, t_n) = \frac{1 - R_{IRS} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i DF(t_0, t_i)}{1 + R_n \Delta_n} \quad (7)$$

Procedura wyliczania czynnika dyskontowego $DF(t_0, t_n)$ wygląda następująco: początkowo przyjmujemy dowolną wartość dla każdego z czynników dyskontowych odpowiadającego dacie zapadalności wszystkich dostępnych kontraktów IRS (w programie wartości te są tak określone, żeby odpowiadały stopie procentowej równej $R_{IRS}(t_n)$, kapitalizowanej w sposób prosty dla okresu $[t_0, t_n]$). Następnie w oparciu o globalną metodę interpolacji uzyskujemy czynniki dyskontowe dla dat w których następują płatności nogi stałej przynajmniej jednego z kontraktów. Kolejnym krokiem jest policzenie stóp stałych dla każdego z IRSów i porównanie ich z wartościami odczytanymi z rynku. W przypadku różnicy większej niż zadany poziom dokładności liczymy nowe czynniki dyskontujące dla momentów t_k będących datą zapadalności k -tego kontraktu. Korzystamy w tym celu ze wzoru 7. Procedura ta jest powtarzana aż do momentu uzyskania żądanej dokładności.

UWAGA!

W przypadku, gdy zmienna *Depo_day_to_spot* przyjmuje wartość większą lub równą 2 (wartość równą 1), do zbudowania krzywej czynników dyskontowych niezbędne jest określenie stóp procentowych odpowiadających depozytom ON i TN (depozytowi ON). Wówczas możliwe jest wyliczenie czynnika dyskontowego odpowiadającego dacie spot dla depozytów. W przypadku gdy po wprowadzeniu danych przez użytkownika, brakuje kwotowania dla depozytu niezbędnego do zbudowania krzywej czynników dyskontowych, potrzebne stopy procentowe wyliczane są za pomocą interpolacji (ekstrapolacji) liniowej w oparciu kwotowania pozostałych depozytów. Stopy procentowe otrzymane w ten sposób dodawane są do tablicy *market_ir*, która następnie służy jako źródło danych przy wyliczaniu tablic czynników dyskontowych.

4.1 Funkcje generujące krzywą krajową

rate2df(t, rate, method)

Dane wejściowe:

Parametry:

t - wektor zawierający ciąg ułamków roku; $rate$ - wektor zawierający ciąg stóp procentowych odpowiadających t ; $method$ (opcjonalnie) - metoda kapitalizacji, zmienna może przyjmować dwie wartości: *simple* - kapitalizacja prosta, *continuous* - kapitalizacja ciągła. W przypadku braku określenia metody kapitalizacji, domyślnie przyjęta jest kapitalizacja ciągła

Wynik działania funkcji:

Wektor zawierający ciąg czynników dyskontowych odpowiadających t

Opis działania funkcji:

Funkcja na podstawie ułamka roku t i odpowiadającej mu stopy procentowej $R(0, t)$, oblicza czynnik dyskontowy $DF(0, t)$

df2rate(t,df,method)

Dane wejściowe:

Parametry:

t - wektor zawierający ciąg ułamków roku; df - wektor zawierający ciąg czynników dyskontowych odpowiadających t ; *method* (opcjonalnie) - metoda kapitalizacji, zmieniać może przyjmować dwie wartości: *simple* - kapitalizacja prosta, *continuous* - kapitalizacja ciągła. W przypadku braku określenia metody kapitalizacji, domyślnie przyjęta jest kapitalizacja ciągła

Wynik działania funkcji:

Wektor zawierający ciąg stóp procentowych odpowiadających t

Opis działania funkcji:

Funkcja na podstawie ułamka roku t i odpowiadającego mu czynnika dyskontowego $DF(0, t)$, oblicza stopę procentową $R(0, t)$

DOM_curve_constr()

Dane wejściowe:

IRS_cf; *IRS_BDA*; *IRS_EMA*; *FC_DOM*; *start_date*; *market_ir*

Parametry:

Wynik działania funkcji:

DSD_Bid, *DSD_Ask* - tablice czynników dyskontowych dla stóp *bid* i *ask* odpowiednio. Tablice zwracane są w postaci zmiennych oraz zapisywane do pliku

Opis działania funkcji:

Funkcja początkowo dokonuje weryfikacji danych, sprawdzając czy wprowadzone zostały wszystkie kwotowania potrzebne do wyliczenia krzywej. W przypadku, gdy brakuje niezbędnych danych, są one wyliczane za pomocą interpolacji (ekstrapolacji) liniowej stóp procentowych na podstawie pozostałych danych. Następnie aktualizowana jest tablica *market_ir*. Ostatecznie stosując metody opisane na początku rozdziału, funkcja wylicza czynniki dyskontowe w oparciu o zaktualizowaną tablicę *market_ir*. Otrzymane tablice czynników dyskontowych zwracane są w postaci zmiennych oraz zapisywane do plików *DSD_Bid.m* i *DSD_Ask.m*

5 Krzywa czynników dyskontowych dla waluty zagranicznej

Czynniki dyskontowe dla waluty zagranicznej są wyliczane na podstawie kwotowań kontraktów forward oraz krajowej krzywej czynników dyskontowych. Standardem rynkowym w przypadku kontraktów forward jest kwotowanie w postaci punktów swapowych, będących różnicą między kursem forward, a kursem spotowym. Możemy wyróżnić dwie sytuacje: gdy kurs forward jest niższy od kursu spot (punkty swapowe są ujemne) to mówimy, że waluta bazowa jest z dyskontem, natomiast gdy kurs forward jest wyższy od kursu spot (punkty swapowe są dodatnie) to mówimy, że waluta bazowa jest z premią. Punkty swapowe są podawane jako wielokrotność punktu bazowego (pip) dla danej pary walutowej, często z pominięciem towarzyszącego im znaku algebra-

icznego. Zarówno wielkość, jak i znak punktów swapowych, zależą od relacji stóp procentowych w kraju i zagranicy. Gdy stopy procentowe w kraju odpowiadającym walucie bazowej są niższe niż w kraju odpowiadającym walucie kwotowanej to wówczas waluta bazowa jest z premią. W przypadku, gdy zachodzi przeciwna nierówność między stopami procentowymi to waluta bazowa jest z dyskontem. Program zakłada, że użytkownik wie jaka jest relacja między stopami procentowymi w krajach odpowiadających parze walutowej i określa ją poprzez nadanie wartości zmiennej PDR . W zależności od tego czy waluta bazowa jest z premią, czy z dyskontem, zmienna PDR przyjmuje odpowiednio wartości 1 lub -1. Ostatecznie kurs forward wyliczany jest według wzoru:

$$F(0, T) = SPOT + PDR \times SWAP_POINT \times pip_val \quad (8)$$

Znając wielkość kursów forward, czynniki dyskontowe dla waluty zagranicznej wyliczane są z następujących wzorów:

$$F_{Bid}(0, T) = Spot_{Bid} \times \frac{DF_{Ask}^b(0, T)}{DF_{Bid}^v(0, T)} \quad (9)$$

$$F_{Ask}(0, T) = Spot_{Ask} \times \frac{DF_{Bid}^b(0, T)}{DF_{Ask}^v(0, T)} \quad (10)$$

gdzie b oznacza walutę bazową, zaś v walutę kwotowaną. Charakter waluty zagranicznej w danej parze walutowej jest określany za pomocą funkcji $base_curr$, a następnie zastosowane jest odpowiednie przekształcenie powyższych wzorów.

5.1 Funkcje generująca krzywą zagraniczną

FOR_curve_constr()

Dane wejściowe:

FX_rate ; $start_date$; DSD_Bid ; DSD_Ask ; $CURR_DOM$; $CURR_FOR$; $market_fx$

Parametry:

Wynik działania funkcji:

DSF_Bid , DSF_Ask - tablice czynników dyskontowych dla stóp bid i ask odpowiednio. Tablice zwracane są w postaci zmiennych oraz zapisywane do pliku

Opis działania funkcji:

Funkcja wylicza czynniki dyskontowe na podstawie danych określonych w tablicy $market_fx$ oraz tablic DSD_Bid i DSD_Ask stosując metody opisane we wstępie do rozdziału. Następnie wygenerowane tablice zwracane są w postaci zmiennej oraz zapisywane do plików $DSF_Bid.m$ i $DSF_Ask.m$

base_curr(CURR_FOR, CURR_DOM)

Dane wejściowe:

Parametry:

$CURR_FOR$; $CURR_DOM$

Wynik działania funkcji:

Kod waluty będącej walutą bazową w kwotowaniu pary walutowej

Opis działania funkcji:

Funkcja dla wprowadzonej pary walut, określa która waluta jest walutą bazową według standardów rynkowych. Identyfikacja waluty bazowej odbywa się poprzez porównanie walut z tabelą: $\{EUR, GBP, AUD, NZD, USD, CAD, CHF, NOK, SEK, DKK, CZK, PLN, TRY, MXN, JPY\}$. Waluta, która zajmuje wcześniejsze miejsce w tabeli jest walutą bazową dla danej pary walutowej. Przykładowo wywołanie funkcji $base_curr("GBP", "TRY")$ zwróci GBP jako walutę bazową w kwotowaniu pary walutowej $GBPTRY$

6 Opis metod interpolacji

Budując krzywą czynników dyskontowych, niejednokrotnie konieczne jest zastosowanie interpolacji (ekstrapolacji). Konkretna metoda jest określana globalnie przez użytkownika za pomocą zmiennej $interp_method$. W celu uproszczenia opisu, przyjmijmy, że dokonujemy interpolacji (ekstrapolacji) w punkcie (t, y_t) z uwzględnieniem punktów węzłowych $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Użytkownik ma do dyspozycji następujące metody interpolacji:

6.1 Interpolacja liniowa

Interpolacja dokonywana jest na podstawie poniższego wzoru:

$$y_t = \frac{t - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} + \frac{x_{i+1} - t}{x_{i+1} - x_i} y_i, \quad t \in [x_i, x_{i+1}] \quad (11)$$

w przypadku ekstrapolacji wzór ten wygląda następująco:

$$y_t = \frac{t - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} y_n + \frac{x_n - t}{x_n - x_{n-1}} y_{n-1}, \quad t \in (x_n, \infty) \quad (12)$$

oraz

$$y_t = \frac{t - x_1}{x_2 - x_1} y_2 + \frac{x_2 - t}{x_2 - x_1} y_1, \quad t \in (-\infty, x_1) \quad (13)$$

Powyższa metoda może zostać zastosowana w różny sposób, wyróżniamy następujące podejścia:

◇ **Linear on Discount Factors**

Współrzędnymi węzłów są ułamki roku oraz odpowiadające im czynniki dyskontowe

◇ **Linear on Spot Rates**

Współrzędnymi węzłów są ułamki roku oraz odpowiadające im stopy procentowe kapitalizowane w sposób ciągły

◇ **Linear on Logarithm of Rates**

Współrzędnymi węzłów są ułamki roku oraz odpowiadające im logarytmy stóp procentowych kapitalizowanych w sposób ciągły

6.2 Metoda RAW

Następująca metoda jest równoważna interpolacji liniowej na logarytmach czynników dyskontowych, przy czym zastosowane jest inne podejście do ekstrapolacji. Gdy $t \in [x_i, x_{i+1}]$ to wynik interpolacji otrzymujemy z poniższego wzoru:

$$y_t = y_i^{1-\tau} y_{i+1}^\tau, \quad \tau = \frac{t - x_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (14)$$

ekstrapolacja zaś określona jest następująco:

$$y_t = y_n^{t/x_n}, \quad t > x_n \quad (15)$$

W przypadku tej metody przyjmujemy, że współrzędnymi punktów węzłowych są ułamki roku i czynniki dyskontowe.

6.3 Natural Cubic Spline

W tej metodzie przyjmujemy, że struktura stóp procentowych opisana jest za pomocą funkcji S sklejanej trzeciego stopnia tzn. takiej, która na każdym z przedziałów $[x_i, x_{i+1}]$ jest wielomianem S_i trzeciego stopnia. Ze względu na fakt, iż funkcji tego typu jest nieskończenie wiele, narzucamy następujące ograniczenia:

- (a) funkcja S musi być ciągła i przyjmować dokładne wartości w punktach węzłowych, co zapewnia nam warunek $S_{i-1}(x_i) = y_i = S_i(x_{i+1})$ dla $2 \leq i \leq n-1$.
- (b) pochodna S' musi być ciągła, co gwarantuje warunek $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_{i+1})$ dla $2 \leq i \leq n-1$.
- (c) druga pochodna S'' musi być ciągła, czyli $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_{i+1})$ dla $2 \leq i \leq n-1$
- (d) rozważamy naturalną funkcję sklejaną, czyli $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$

W sumie wielomiany S_i mają $4n$ współczynników, a powyższe warunki zapewniają nam $4n$ równań, więc funkcja S jest określona w sposób jednoznaczny. Zauważamy, że funkcja S'' odpowiada liniowej interpolacji, zatem wprowadzając oznaczenia $S''(x_i) = z_i$ mamy:

$$S''_i(t) = \frac{t - x_i}{h_i} z_{i+1} + \frac{x_{i+1} - t}{h_i} z_i, \quad h_i = t_{i+1} - t_i \quad (16)$$

Całkując obustronnie powyższy wzór i korzystając z ciągłości S'' otrzymujemy:

$$S_i(t) = \frac{z_i}{6h_i} (x_{i+1} - t)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i} (t - x_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) (t - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6} \right) (x_{i+1} - t) \quad (17)$$

Pozostaje jedynie znaleźć wartości z_i . Wprowadźmy oznaczenia:

$$u_i = 2(h_{i-1} + h_i), \quad b_i = \frac{6}{h_i} (y_{i+1} - y_i), \quad v_i = b_i - b_{i-1} \quad (18)$$

Wówczas z warunków ciągłości pochodnej otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} & \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Taki układ z macierzą trójdziagonalną możemy łatwo rozwiązać za pomocą następującego wariantu metody Gaussa:

Forward loop:

```
for i=2 to n-1
    u(i)=u(i)-h(i-1)^2/u(i-1)
    v(i)=v(i)-h(i-1)v(i-1)/u(i-1)
end
```

Backward loop:

```
for i=n-1 to 2
    z(i)=(v(i)-h(i)z(i+1))/u(i-1)
end
```

Ostatecznie dla $t \in [x_i, x_{i+1}]$ mamy $S = S_i$, zaś gdy $t \in (x_n, \infty)$ to $S = S_n$.

6.4 B Spline

B splinem stopnia d nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k B_k^{(d)}(t), \quad (20)$$

gdzie f_k to wartość w k -tym węźle (oznaczonym jako t_k) a $B_k^{(d)}(t)$ jest współczynnikiem stopnia d w punkcie t zdefiniowanym rekurencyjnie w następujący sposób:

$$B_k^{(d)}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+d} - t_k} B_k^{(d-1)}(t) + \frac{t_{k+d+1} - t}{t_{k+d+1} - t_{k+1}} B_{k+1}^{(d-1)}(t) \quad (21)$$

oraz $B_k^{(0)}(t) = \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t)$. Warto zauważyć, że współczynniki $B_k^{(d)}(t)$ są nieujemne oraz dla każdego t zachodzi $\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k^{(d)}(t) = 1$.

Istotnym problemem jaki napotykamy podczas stosowania B splinów w przypadku interpolacji stóp procentowych jest ograniczenie wynikające ze skończonej ilości węzłów. W programie został zaimplementowany jeden ze sposobów rozwiązania tego zagadnienia polegający na liniowej ekstrapolacji zależnej od parametru d liczby elementów w bliskim otoczeniu skrajnych węzłów.

6.5 Funkcje interpolujące

addinterp(t, DS)

Dane wejściowe:

interp_method

Parametry:

t - wektor zawierający ułamki roku w których poszukiwany jest wynik interpolacji; *DS* - macierz zawierająca w pierwszej kolumnie ułamek roku, w drugiej odpowiadającą mu wartość czynnika dyskontowego

Wynik działania funkcji:

Wektor czynników dyskontowych odpowiadających czasom określonym w *t*

Opis działania funkcji:

Funkcja dzieli tablicę *DS* na dwa wektory *x* i *y*, a następnie w zależności od wartości zmiennej *interp_method*, odwołuje się do określonej funkcji interpolującej

linear_interp(t, x, y)

Dane wejściowe:

Parametry:

t - wektor zawierający ułamki roku w których poszukiwany jest wynik interpolacji; *x* - wektor zawierający pierwsze współrzędne węzłów; *y* - wektor zawierający drugie współrzędne węzłów

Wynik działania funkcji:

Wektor z wyinterpolowanymi wartościami, odpowiadającymi czasom określonym w *t*

Opis działania funkcji:

Funkcja dokonuje interpolacji liniowej opierając się o wzory opisane we wstępie do rozdziału

raw_interp(t, x, y)

Dane wejściowe:

Parametry:

t - wektor zawierający ułamki roku w których poszukiwany jest wynik interpolacji; *x* - wektor zawierający pierwsze współrzędne węzłów; *y* - wektor zawierający drugie współrzędne węzłów

Wynik działania funkcji:

Wektor z wyinterpolowanymi wartościami, odpowiadającymi czasom określonym w *t*

Opis działania funkcji:

Funkcja dokonuje interpolacji metodą *raw* opierając się o wzory opisane we wstępie do rozdziału

nbubs_interp(t, x, y)

Dane wejściowe:

Parametry:

t - wektor zawierający ułamki roku w których poszukiwany jest wynik interpolacji;
x - wektor zawierający pierwsze współrzędne węzłów; *y* - wektor zawierający drugie współrzędne węzłów

Wynik działania funkcji:

Wektor z wyinterpolowanymi wartościami, odpowiadającymi czasom określonym w *t*

Opis działania funkcji:

Funkcja dokonuje interpolacji przy pomocy naturalnej funkcji sklejaney, metodą opisaną we wstępie do rozdziału

bsplines(t,x,y,d)

Dane wejściowe:

Parametry:

t - wektor zawierający ułamki roku w których poszukiwany jest wynik interpolacji;
x - wektor zawierający pierwsze współrzędne węzłów; *y* - wektor zawierający drugie współrzędne węzłów; *d* - skalar wyznaczający stopień B splinów

Wynik działania funkcji:

Wektor z wyinterpolowanymi wartościami, odpowiadającymi czasom określonym w *t*

Opis działania funkcji:

Funkcja dokonuje interpolacji przy pomocy B splinów, rekurencyjną metodą zaprezentowaną we wstępie do rozdziału

7 Czynniki dyskontowe i stopy forward

Czynnik dyskontowy forward wyliczany jest ze wzoru:

$$DF(t, T_0, T) = \frac{DF(t, T)}{DF(t, T_0)} \quad (22)$$

Stopa forward natomiast jest wyliczana ze wzoru:

$$f(t, S, T) = \frac{1}{T - S} \left(\frac{DF(t, S)}{DF(t, T)} - 1 \right) \quad (23)$$

7.1 Funkcje wyznaczające czynniki dyskontowe i stopy forward

DF_pom(t, DS)

Dane wejściowe:

start_date

Parametry:

t - wektor frakcji roku; DS - tablica czynników dyskontowych, do wyboru: DSD_Bid , DSD_Ask , DSF_Bid , DSF_Ask

Wynik działania funkcji:

Wektor czynników dyskontowych odpowiadających czasom t

Opis działania funkcji:

Funkcja w oparciu o określoną tablicę czynników dyskontowych, zwraca czynniki dyskontowe odpowiadające czasom określonym w t . Funkcja korzysta z funkcji $ad_interp()$

$DF(date0, date, DS)$

Dane wejściowe:

$start_date$

Parametry:

$date0$ - data w konwencji dd-mm-yyyy oznaczająca datę na którą chcemy policzyć czynnik dyskontowy; $date$ - tablica zawierająca daty na które chcemy uzyskać czynniki dyskontowe; DS - tablica czynników dyskontowych

Wynik działania funkcji:

wektor czynników dyskontowych forward opisanych jak wyżej w części teoretycznej:

$DF(start_date, date0, dates\{1\}), \dots, DF(start_date, date0, dates\{n\})$

Opis działania funkcji:

Funkcja oblicza czynniki dyskontowe forward zgodnie ze wzorem zamieszczonym w wstępie do rozdziału. Przykład wywołania funkcji: $x=DF("31-May-2010", {"17-Aug-2010", "20-Dec-2011"}, DSD_Bid)$. Funkcja zwróci nam wektor czynników dyskontowych dostępnych na dzień 31 maja 2010 r. Odwołanie $x(1)$ zwraca nam czynnik dyskontowy z 17 sierpnia 2010 r. wyznaczony na dzień 31 maja 2010 r. Wybierając $x(2)$ uzyskamy czynnik dyskontowy na dzień 31 maja 2010 r. z dnia 20 grudnia 2011 r. (wartość w dniu 31 maja 2010 r. 1 zł wypłaconej w dniu 20 grudnia 2011 r.). Funkcja korzysta z DF_pom

$FR(date0, dates1, dates2, DS)$

Dane wejściowe:

Parametry:

$date0$ - data w konwencji dd-mm-yyyy oznaczająca datę na którą chcemy policzyć stopę forward; $dates1$ - tablica złożona z dat w standardowej konwencji, oznaczających początki okresów na które chcemy mieć liczoną stopę forward; $dates2$ - tablica złożona z dat w standardowej konwencji, oznaczających końce okresów na które chcemy mieć liczoną stopę forward; DS - tablica czynników dyskontowych

Wynik działania funkcji:

wektor złożony ze stóp forward $f(date0, dates1\{1\}, dates2\{1\}), \dots, f(date0, dates1\{n\}, dates2\{n\})$;

Opis działania funkcji:

Funkcja jako swoje parametry musi posiadać $date0$ - czyli datę z perspektywy której wyznaczone są stopy forward. Tablice $dates1$ i $dates2$ muszą być równoliczne, daty początku i końca okresu dla danej stopy powinny być na tych samych miej-

scach w dwóch tablicach. Zakładamy, że daty początku i końca okresu są w odpowiednim porządku. Stopy forward wyznaczamy ze wzoru podanego we wstępie do rozdziału. Przykład wywołania funkcji: $x=FR("31-May-2010", \{ "31-May-2010", "13-Jan-2011" \}, \{ "31-May-2011", "20-Aug-2011" \}, "ACT/365")$. Funkcja zwróci nam wektor stóp forward na dzień 31 maja 2010 r. Odwołanie $x(1)$ zwraca nam roczną stopę procentową, zaś $x(2)$ zwraca nam stopę forward obowiązującą pomiędzy datami 13 stycznia 2011 r. a 20 sierpnia 2011 r. wyliczoną w dniu 31 maja 2010 r.

DS_conv(date, DS)

Dane wejściowe:

Parametry:

date - data w formacie dd-mm-yyyy; *DS* - tablica czynników dyskontowych **Wynik**

działania funkcji:

Numer wiersza zawierający konwencję DCC, stosowaną dla daty *date*

Opis działania funkcji:

Funkcja pomocnicza, umożliwiająca zidentyfikowanie konwencji obowiązującej w okresie, w którym znajduje się data *date*

Literatura

- [1] Hagan P., West G., *Interpolation Methods for Curve Construction*, Applied Mathematical Finance 2006.
- [2] Kincaid D., Cheney W., *Analiza numeryczna*, WNT 2002.
- [3] Ron U., *A Practical Guide to Swap Curve Construction*, Bank of Canada 2000.
- [4] Andrew Lesniewski, *INTEREST RATES AND FX MODELS 1. The Forward Curve*, Courant Institute of Mathematics, New York University 2011.
- [5] Finance Trainer, *Outrights/FX swaps*,
http://www.financetrainer.com/fileadmin/inhalte/TOOLS_SKRIPTEN/0102_forwarde.pdf.