

Dokumentacja

Wycena opcji za pomocą uogólnionego modelu Hestona i modeli pokrewnych

Mikołaj Bińkowski
Wiktor Gromniak

Spis treści

1	Wstęp teoretyczny	3
1.1	Rozpatrywane modele stochastycznej zmienności	3
1.1.1	Model Hestona	3
1.1.2	Model Stein&Stein	3
1.1.3	Model SABR	3
1.1.4	Model CEV	3
1.1.5	Model Hull&White	4
1.1.6	Uogólniony model Hestona	4
1.2	Symulacja Monte Carlo	4
2	Struktura katalogów	4
3	Zależności	5
4	Inicjalizacja - zmienne globalne	5
4.1	Parametry kalendarzowe, parametry wypłaty	5
4.2	Parametry opcji	6
4.3	Parametry modelu	6
5	Funkcje	7
5.1	MC_price	7
5.1.1	argumenty funkcji	7
5.1.2	wynik funkcji	7
5.2	generatePaths	7
5.2.1	argumenty funkcji	8
5.2.2	wynik funkcji	8
5.3	priceCalculate	8
5.3.1	argumenty funkcji	8
5.3.2	wynik funkcji	8
5.4	discountsCalculate	8
5.4.1	argumenty funkcji	8
5.4.2	wynik funkcji	9
5.5	getDFTable	9
5.5.1	argumenty funkcji	9
5.5.2	wynik funkcji	9
5.6	generalPayoffDF	9
5.6.1	argumenty funkcji	9
5.6.2	wynik funkcji	10
5.6.3	zależność od zewnętrznych funkcji	10
5.7	payoffDF	10
5.7.1	argumenty funkcji	10
5.7.2	wynik funkcji	10
6	Obsługa programu	10

1 Wstęp teoretyczny

Program implementuje symulacje Monte-Carlo dla szeregu modeli Stochastic Volatility.

We wszystkich modelach współczynnik dryfu aktywa bazowego modelowany jest za pomocą rzeczywistych krzywych dyskontowych; stąd parametr dryfu nie jest wprowadzany bezpośrednio przez użytkownika, lecz wyprowadzany jest z danych rynkowych z użyciem istniejących modułów projektu.

1.1 Rozpatrywane modele stochastycznej zmienności

1.1.1 Model Hestona

Model Hestona zadany jest przez układ stochastycznych równań różniczkowych

$$dS_t = r(t)S_t dt + \sqrt{V_t}S_t dW_t^S, \quad (1)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \omega\sqrt{V_t}dW_t^V, \quad (2)$$

gdzie W^S, W^V są standardowymi procesami Wienera o współczynniku korelacji $\rho \in [-1, 1]$, tj. $d\langle W^S, W^V \rangle_t = \rho dt$.

1.1.2 Model Stein&Stein¹

Model Stein&Stein zadany jest przez układ stochastycznych równań różniczkowych

$$dS_t = r(t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^S, \quad (3)$$

$$d\sigma_t = \kappa(\theta - \sigma_t)dt + \alpha dW_t^\sigma, \quad (4)$$

gdzie W^S, W^σ są standardowymi procesami Wienera o współczynniku korelacji $\rho \in [-1, 1]$, tj. $d\langle W^S, W^\sigma \rangle_t = \rho dt$.

1.1.3 Model SABR

Model SABR zadany jest przez układ stochastycznych równań różniczkowych

$$dS_t = r(t)S_t dt + \sigma_t S_t^\beta dW_t^S, \quad (5)$$

$$d\sigma_t = \alpha \sigma_t dW_t^\sigma, \quad (6)$$

gdzie W^S, W^σ są standardowymi procesami Wienera o współczynniku korelacji $\rho \in [-1, 1]$, tj. $d\langle W^S, W^\sigma \rangle_t = \rho dt$.

1.1.4 Model CEV

Model CEV zadany jest przez stochastyczne równanie różniczkowe

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_0 S_t^\beta dW_t, \quad (7)$$

gdzie W_t jest standardowym procesem Wienera. W modelu CEV stochastyczna zmienność zależy od ceny aktywa i wynosi $\sigma_0 S_t^{\beta-1}$.

¹Na podstawie [4]

1.1.5 Model Hull&White²

Model Hull&White zadany jest przez układ stochastycznych równań różniczkowych

$$dS_t = r(t)S_t dt + \sqrt{V_t}S_t dW_t^S, \quad (8)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \omega V_t^\alpha dW_t^V, \quad (9)$$

gdzie W^S, W^V są standardowymi procesami Wienera o współczynniku korelacji $\rho \in [-1, 1]$, tj. $d\langle W^S, W^V \rangle_t = \rho dt$.

1.1.6 Uogólniony model Hestona

Model Hestona zadany jest przez układ stochastycznych równań różniczkowych

$$dS_t = r(t)S_t dt + \lambda\sqrt{V_t}S_t^\beta dW_t^S, \quad (10)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \omega V_t^\alpha dW_t^V, \quad (11)$$

gdzie W^S, W^V są standardowymi procesami Wienera o współczynniku korelacji $\rho \in [-1, 1]$, tj. $d\langle W^S, W^V \rangle_t = \rho dt$.

1.2 Symulacja Monte Carlo

Symulacji ścieżek zmienności dokonano z wykorzystaniem Implicit Milstein Method, która wykazuje się przewagą pod względem szybkości zbieżności, co zbadano w [3]. Symulacji ścieżek ceny aktywa bazowego dokonano z wykorzystaniem metody Eulera, za wyjątkiem przypadku modelu Hestona, gdzie zastosowano efektywniejszy IJK scheme³. W symulacjach zastosowano metodę zmiennych antytrycznych.

2 Struktura katalogów

Projekt posiada następującą strukturę katalogów:

```
| SVMC
|- base
|- data
|- doc
```

Poszczególne katalogi zawierają:

- SVMC - katalog główny, zawiera plik `set_global.m` w którym należy wprowadzić zmienne wymagane do wyceny, pliki `calendarBasedFunctions`, `payoffFunctions`, `pricingFunctions` zawierające odpowiednio funkcje kalendarzowe, funkcje wypłaty oraz funkcje używane do wyceny. Ponadto w katalogu znajduje się plik `example.m` testujący działanie programu przez wywołanie głównej funkcji.

²Na podstawie [1]

³Na podstawie [3] i [2]

- `base` - katalog zawierający wszystkie pliki bazowe, stworzone w poprzednich fazach projektu, z których korzysta program.
- `data` - katalog zawierający pliki z danymi rynkowymi.
- `doc` - katalog zawierający dokumentację.

3 Zależności

Program korzysta z funkcji kalendarzowych oraz funkcji tworzących krzywe dyskontowe zaimplementowanych w modułach dotyczących algorytmu Longstaffa-Schwartza⁴, funkcji dyskontowych⁵ oraz funkcji kalendarzowych⁶. Funkcje te znajdują się w plikach w katalogu `base`, a także w pliku `calendarBasedFunctions`.

Funkcje wypłaty zdefiniowane w pliku `payoffFunctions.m` są tymi z wypłat zdefiniowanych w ww. module, które mają charakter europejski. Ich dokumentację można znaleźć w [5], rozdział 3.3.1.

4 Inicjalizacja - zmienne globalne

Parametry instrumentów będących przedmiotem wyceny, modeli wyceniających oraz metody Monte Carlo są zapisane w programie w postaci zmiennych globalnych w pliku `set_global.m`

4.1 Parametry kalendarzowe, parametry wypłaty⁷

- `start_date` - data otrzymania danych rynkowych, string o formacie `'dd-mm-yyyy'`.
- `expire_date` - data wygaśnięcia kontraktu opcyjnego, string o formacie `'dd-mmm-yyy'`.
- `issue_date` - data podpisania kontraktu opcyjnego, string o formacie `'dd-mm-yyyy'`, nie może wypadać w dzień roboczy.
- `Mt` - ilość kroków gridu czasu w ciągu jednego dnia życia opcji, integer.
- `Mx` - ilość ścieżek aktywa bazowego w symulacji Monte Carlo, integer.
- `type` - `'1'` - call lub sprzedaż długa (long), `'-1'` - put lub sprzedaż krótka (short).
- `vol_DDC` - string, typ konwencji na jakiej pracujemy, czyli np. `"ACT/360"`, `"ACT/365"`, `"30/360"`, `"30/365"`.
- `FC_DOM` - string, nazwa giełdy na której wyceniamy opcję.

⁴Dokumentacja: [5]

⁵Dokumentacja: [7]

⁶Dokumentacja: [8]

⁷Na podstawie dokumentacji modułu *Wycena opcji amerykańskich na rynku equity metodą Longstaffa-Schwartza*, D. Toczydłowska, P. Kosewski, rozdział 3.3.1

- Depo_BDA - string, identyfikator płatności, np. sfbd - Standard Following Business Day, mfbd - Modified Following Business Day.
- DF_type - string, rodzaj czynnika dyskontowego, czyli: 'Ave', 'Ask', 'Bid'.
- OSO - Option Settlement Offset; liczba dni od expire_date do delivery_date (settlement_date; daty realizacji świadczenia z opcji).
- interp_method - string, metoda interpolacji czynników dyskontowych, np. 'linear on df'.
- checkWorkDay - '1' - realizujemy opcję tylko w dni robocze, '0' realizujemy opcje również w dni nierobocze.

4.2 Parametry opcji

- S0 - cena początkowa aktywa bazowego.
- K - cena wykonania.
- B - bariera (dotyczy europejskich opcji barierowych)
- type - typ opcji, przyjmuje wartość 1 dla opcji call, -1 dla opcji put.
- name - string, nazwa funkcji wypłaty danej opcji. Wyróżniamy 'PayoffCallPut', 'PayoffStraddel',

4.3 Parametry modelu

Dla ustalonego modelu istotne są tylko parametry jego dotyczące.

1. Model Hestona - $\kappa, \theta, \omega, \rho, V_0$.
2. Model Stein&Stein - $\kappa, \theta, \alpha, \sigma_0$.
3. Model SABR - $\alpha, \beta, \rho, \sigma_0$.
4. Model CEV - σ_0, β .
5. Model Hull&White - $\kappa, \omega, \rho, V_0$
6. Uogólniony model Hestona - $\lambda, \beta, \kappa, \omega, \alpha, V_0$.

Powyższym parametrom odpowiadają następujące zmienne globalne:

- model - identyfikator modelu, string; przyjmuje następujące wartości: "Heston", "SteinStein", "SABR", "CEV", "HullWhite", "geralizedSABR".
- V0 - V_0 , początkowa wartość wariancji (kwadratu zmienności), numeric. Dotyczy modelu Hestona, Hull&White oraz uogólnionego modelu Hestona.
- sigma0 - σ_0 , początkowa wartość zmienności, numeric. Dotyczy modeli Stein&Stein, SABR oraz CEV.

- alpha - parametr α .
- Beta - parametr β .
- rho - parametr ρ , korelacja procesów Wienera. Dotyczy modeli Hestona, Stein&Stein, SABR, Hull&White oraz uogólnionego modelu Hestona.
- lambda - parametr λ . Dotyczy uogólnionego modelu Hestona.
- kappa - parametr κ , szybkość powrotu zmienności (wariancji) do średniej lub dryf wariancji (w modelu Hull&White).
- theta - parametr θ , długoterminowa średnia zmienności (wariancji).
- omega - parametr ω , "zmienność zmienności".

5 Funkcje

5.1 MC_price

5.1.1 argumenty funkcji

Funkcja pomocnicza obliczająca cenę opcji.

- grid = daysNumber * Mt - integer, długość wektora,
- PayoffFunction - funkcja wypłaty określona przy wyborze rodzaju opcji przez użytkownika (globalna zmienna name),
- discountCurve - wektor czynników dyskontowych dla narastających delt czasu,
- discountDelta - wektor czynników dyskontowych dla delt czasu,
- workingGrid - wektor wartości binarnych dla każdego gridu czasowego o długości grid, '1' - dzień roboczy, '0' - dzień wolny,
- tgrid - wektor delt czasu narastająco,
- dt - delta czasu między jednym gridem a drugim, jako ułamek roku,

5.1.2 wynik funkcji

Funkcja zwraca cenę opcji europejskiej o ustalonych parametrach.

5.2 generatePaths

Funkcja pomocnicza obliczająca ścieżki wartości aktywa bazowego oraz jego zmienności.

5.2.1 argumenty funkcji

- `grid` = `daysNumber * Mt` - integer, długość wektora,
- `tgrid` - wektor delt czasu narastająco,
- `dt` - delta czasu między jednym gridem a drugim, jako ułamek roku,
- `discountDelta` - wektor czynników dyskontowych dla delt czasu,
- `ss` - zmienna pomocnicza zależna od wybranego modelu.

5.2.2 wynik funkcji

- `assetPaths` - macierz o wymiarach $2M_x \times M_t$, której wiersze odpowiadają poszczególnym wylosowanym ścieżkom cen,
- `volatilityPaths` - macierz o wymiarach $2M_x \times M_t$, której wiersze odpowiadają poszczególnym wylosowanym ścieżkom zmienności (wariancji),

5.3 priceCalculate

Jedyna funkcja wywoływana przez końcowego użytkownika programu.

5.3.1 argumenty funkcji

Funkcja nie posiada żadnych argumentów, wszystkie dane potrzebne do obliczeń przechowywane są jako zmienne globalne w pliku `set_global.m`.

5.3.2 wynik funkcji

Funkcja zwraca cenę opcji europejskiej o ustalonych parametrach.

5.4 discountsCalculate

Funkcja obliczają czynniki dyskontowe na podstawie dostępnych danych rynkowych. Jest rozwinięciem analogicznej funkcji z modułu *Wycena opcji amerykańskich na rynku equity metodą Longstaffa-Schwartz*⁸ o możliwość obliczenia czynników dyskontowych dla rynku zagranicznego.

5.4.1 argumenty funkcji

- `datesVector` - wektor stringów, dat od `issue_date` do `expire_date`, format `'dd-mm-yyyy'`,
- `grid` - długość wektora `daysNumber` razy `Mt`, integer,
- `daysNumber` - liczba pełnych dni do wygaśnięcia opcji, integer,

⁸Dokumentacja: [5], rozdział 3.2

- `DF_location` - argument decydujący o tym dla jakiego rynku mają zostać obliczone czynniki dyskontowe, string. Wartości "domestic", "foreign" odpowiadają odpowiednio rynkowi krajowemu i zagranicznemu; wartością domyślną jest "domestic".

5.4.2 wynik funkcji

- `discountCurve` - wektor czynników dyskontowych dla narastających delt czasu,
- `discountDelta` - wektor czynników dyskontowych dla delt czasu,

5.5 getDFTable

Funkcja pomocnicza, służąca do wczytywania odpowiednich tabel czynników dyskontowych z plików z danymi na podstawie zmiennej globalnej `DF_type`.

5.5.1 argumenty funkcji

- `DF_location` - string, zmienna określająca jakie krzywe mają zostać pobrane, przyjmuje wartości "foreign", "domestic" odpowiednio dla krzywych krajowych i zagranicznych.

5.5.2 wynik funkcji

- `DFTable` - tabela czynników dyskontowych.

5.6 generalPayoffDF

Funkcja pomocnicza obliczająca czynnik dyskontowy wymagany do dyskontowania wypłat przy obliczaniu ceny opcji⁹ uwzględniając rzeczywiste terminy płatności.

5.6.1 argumenty funkcji

- `issueDate` - moment przepływu premii opcyjnej między uczestnikami transakcji,
- `expireDate` - moment zapadalności opcji (maturity),
- `oso` - Option Settlement Offset; liczba dni od `expire_date` do `delivery_date` (`settlement_date`; daty realizacji świadczenia z opcji),
- `market` - string, nazwa giełdy na której wyceniamy opcję,
- `DS` - tabela czynników dyskontowych (krajowych lub zagranicznych, do odczytania np. z pliku "data/DSD_Ave.m").

⁹[6], rozdział 2.8

5.6.2 wynik funkcji

- `df` - czynnik dyskontowy z momentu `issueDate` na moment *delivery date* na zadanym rynku.

5.6.3 zależność od zewnętrznych funkcji

Funkcja korzysta z implementacji funkcji `is_business_day2`¹⁰ oraz `DF`¹¹.

5.7 payoffDF

Funkcja pomocnicza obliczająca czynnik dyskontowy wymagany do dyskontowania wypłat przy obliczaniu ceny opcji¹² uwzględniając rzeczywiste terminy płatności, dla danych wprowadzonych przez zmienne globalne `issue_date`, `expire_date`, `OSO`, `FC_DOM`.

5.7.1 argumenty funkcji

- `DF_location` - argument decydujący o tym dla jakiego rynku mają zostać obliczone czynniki dyskontowe, string. Wartości "domestic", "foreign" odpowiadają odpowiednio rynkowi krajowemu i zagranicznemu.

5.7.2 wynik funkcji

- `df` - czynnik dyskontowy z momentu `issue_date` na moment *delivery date* na zadanym rynku.

6 Obsługa programu

1. Wprowadzenie parametrów rynku, opcji, symulacji i modelu do pliku `set_global.m`.
2. Wykonanie pliku `example.m`.

Literatura

- [1] J. Hull, A. White *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, The Journal of Finance, Vol. 42, Issue 2, 1987, 281-300.
- [2] C. Kahl, P. Jackel *Fast strong approximation Monte-Carlo schemes for stochastic volatility models*, 2006.
- [3] R. Lord, R. Koekkoek, D. van Dijk *Comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models*, 2008.

¹⁰Dokumentacja: [8]

¹¹Dokumentacja: [7]

¹²[6], rozdział 2.8

- [4] E.M. Stein, J.C. Stein, *Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach*, The review of Financial Studies Vol. 4 No. 4, 1991.
- [5] D. Toczydłowska, P. Kosewski *Dokumentacja - Wycena opcji amerykańskich na rynku equity metodą Longstaffa-Schwartza*, 2013.
- [6] B. Wróblewski, A. Palczewski *Dokumentacja - Obliczanie cen i parametrów greckich*.
- [7] A. Ryterski, M. Sosnowski, B. Milczarek, A. Palczewski *Dokumentacja - Struktura terminowa stóp procentowych*.
- [8] M. Jabłoński, A. Kaszkowiak, K. Aródź, A. Palczewski *Dokumentacja - Funkcje kalendarzowe*, wersja 2.