Dokumentacja

Wyznaczanie powierzchni zmienności implikowanej na rynku *equity*

Piotr Garbuliński
Bartosz Głowinkowski
Katarzyna Mioduszewska
Marek Pawłowski
dodatki AP

Spis treści

Opis zadania

Celem projektu jest stworzenie oprogramowania wyznaczającego zmienność implikowaną opcji europejskich przy wykorzystaniu danych rynkowych (cen opcji amerykańskich put i call). W pracy zostały zaimplementowane dwie metody: "wprost", czyli przez odwrócenie wzoru Blacka-Scholesa, oraz przez odwrócenie przybliżonego wzoru na cenę opcji amerykańskiej zaproponowanego w pracy Ju-Zhonga [2]. W drugim sposobie, aby wyliczyć zmienność implikowaną posługujemy się interpretacją ceny opcji amerykańskiej V_A jako sumy ceny opcji europejskiej V_E i premii za wcześniejsze wykonanie tejże opcji V, to znaczy: $V_A = V_E + V$. Aby pozbyć się arbitrażu wykonano interpolację Fenglera [3].

1 Wstęp teoretyczny

Metoda I Zmienność implikowaną otrzymujemy przez odwrócenie wzoru Blacka-Scholesa. W tym przypadku zakładamy, wzór B-S jest poprawny również dla opcji amerykańskich.

$$V_t^{\text{Call}} = S_0 N(d_1(S_0,t)) - K \cdot \frac{DF(0,t)}{DF_d(0,t)} \cdot N(d_2(S_0,t)), \tag{1}$$

gdzie

$$d_1(S_0,t) = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \qquad d_2(S_0,t) = d_1(S_0,t) - \sigma\sqrt{t}$$

a $DF_d(0,t)$ jest czynnikiem dyskontowym pochodzącym od stopy dywidendy d.

Metoda II W tej części wyprowadzimy wszystkie wzory, które potem posłużą nam do wyznaczanie zmienności implikowanej według [1].

1.1 Założenia

Głównymi założeniami jakie przyjmujemy w zagadnieniu modelowania early exercise premimum opcji amerykańskiej jest stała stopa procentowa r oraz stała stopa dywidendy d.

1.2 Cena opcji amerykańskiej

W tej części przedstawiono wyprowadzenie wzorów na early exercise premium V, a zarazem wzorów na cenę opcji amerykańskiej V_A.

Jak już wcześniej wspomniano cenę opcji amerykańskiej przedstawiamy jako sumę ceny opcji europejskiej V_E oraz premię za wcześniejsze wykonanie opcji V.

$$V_A = V_E + V \tag{2}$$

Wzory na V_E są wyrażone jawnym analitycznym wzorem 1. Pozostaje nam wyprowadzenie wzorów na V.

1.3 Wyprowadzenie wzorów na *early exercise premium* V

Podążając za [2] zachodzi następujące równanie różniczkowe dla każdej ceny opcji (F) - zarówno europejskiej jak i amerykańskiej:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial F}{\partial S} - rF - \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0 \tag{3}$$

Jako że, to równanie jest spełnione zarówno dla V_A jak i dla V_E to z liniowości jest również spełnione dla V. Zatem mamy:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV - \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0 \tag{4}$$

Przyjmijmy teraz następujące oznaczenia:

$$\alpha = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad \beta = \frac{2(r-d)}{\sigma^2}, \quad h(\tau) = 1 - \exp^{-r\tau} \tag{5}$$

A także załóżmy, że premię V można przedstawić jako:

$$V = h(\tau)g(S,h) \tag{6}$$

Podstawiając do równania 4 otrzymujemy następujące równanie różniczkowe na funkcję g:

$$S^2\frac{\partial^2 g}{\partial S^2} + \beta S\frac{\partial g}{\partial S} - \frac{\alpha}{h(\tau)}g - (1-h)\alpha\frac{\partial g}{\partial h} = 0 \tag{7}$$

Dowód:

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rF - \frac{\partial V}{\partial \tau} \\
=& \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 h(\tau)g(S,h)}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial h(\tau)g(S,h)}{\partial S} - rh(\tau)g(S,h) - \frac{\partial h(\tau)g(S,h)}{\partial \tau}\frac{2}{\sigma^2 h(\tau)} \\
=& S^2\frac{\partial^2 g(S,h)}{\partial S^2} + \frac{2(r-d)}{\sigma^2}S\frac{\partial g(S,h)}{\partial S} - \frac{2r}{\sigma^2}g(S,h) - \frac{2}{\sigma h(\tau)}\frac{\partial h(\tau)g(S,h)}{\partial \tau} \\
=& S^2\frac{\partial^2 g(S,h)}{\partial S^2} + \beta S\frac{\partial g(S,h)}{\partial S} - \alpha g(S,h) - \frac{2}{\sigma h(\tau)}(\frac{\partial h(\tau)}{\partial \tau}g(S,h) + h(\tau)\frac{\partial g(S,h)}{\partial \tau}) \\
=& S^2\frac{\partial^2 g}{\partial S^2} + \beta S\frac{\partial g}{\partial S} - \alpha g - \frac{2}{\sigma h(\tau)}((1-h(\tau))rg + h(\tau)\frac{\partial g}{\partial h}\frac{\partial h(\tau)}{\partial \tau}) \\
=& S^2\frac{\partial^2 g}{\partial S^2} + \beta S\frac{\partial g}{\partial S} - \frac{\alpha}{h(\tau)}g + \frac{2}{\sigma}\frac{\partial g}{\partial h}(1-h(\tau))r \\
=& S^2\frac{\partial^2 g}{\partial S^2} + \beta S\frac{\partial g}{\partial S} - \frac{\alpha}{h(\tau)}g + (1-h(\tau))\alpha\frac{\partial g}{\partial h}.
\end{aligned}$$

Pomysł na aproksymację V jest następujący. Otóż rozbijamy V na sumę: $V = hg = h(g_1 + g_2)$, gdzie hg_2 jest korektą hg_1

Zatem dla $g = g_1 + g_2$, powyższe równanie różniczkowe przybiera postać

$$S^2\frac{\partial^2 g_1}{\partial S^2} + S^2\frac{\partial^2 g_2}{\partial S^2} + \beta S\frac{\partial g_1}{\partial S} + \beta S\frac{\partial g_2}{\partial S} - \frac{\alpha}{h(\tau)}g_1 - \frac{\alpha}{h(\tau)}g_2 + (1-h(\tau))\alpha\frac{\partial g_1}{\partial h} + (1-h(\tau))\alpha\frac{\partial g_2}{\partial h} = 0 \tag{8}$$

Załóżmy, że g_1 spełnia równanie:

$$S^2\frac{\partial^2 g_1}{\partial S^2} + \beta S\frac{\partial g_1}{\partial S} - \frac{\alpha}{h}g_1 = 0 \tag{9}$$

Zatem, g_2 musi spełniać:

$$S^2\frac{\partial^2 g_2}{\partial S^2} + \beta S\frac{\partial g_2}{\partial S} - \frac{\alpha}{h}g_2 + (1-h(\tau))\alpha(\frac{\partial g_1}{\partial h} + \frac{\partial g_2}{\partial h}) = 0 \tag{10}$$

Zajmijmy się rozwiązywaniem równania na g_1.
Rozwiązując przez podstawienie $u = \ln S, \quad \frac{dS}{du} = e^u$, otrzymujemy:

$$\frac{dg_1}{dS} = \frac{dg_1}{du}\frac{du}{dS} = \frac{dg_1}{du}(\frac{dS}{du})^{-1} = \frac{dg_1}{du}e^{-u}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2g_1}{dS^2} =& \frac{(d\frac{dg_1}{dS})}{dS} = \frac{d\frac{dg_1}{dS}}{du}\frac{du}{dS} = \frac{d(\frac{dg_1}{du}\frac{du}{dS})}{du}\frac{du}{dS} = \frac{d(\frac{dg_1}{du}\exp(-u))}{du}\exp(-u) \\ =& \exp(-u)(\frac{d^2g_1}{du^2}\exp(-u) - \frac{dg_1}{du}\exp(-u))\end{aligned}$$

Zatem, podstawiając, otrzymujemy równanie:

$$\frac{d^2g_1}{du^2} + (\beta - 1)\frac{dg_1}{du} - \frac{\alpha}{h}g_1 = 0 \tag{11}$$

Rozwiązując równanie różniczkowe o stałych współczynnikach otrzymujemy:

$$g_1 = a_1 S^{\lambda_1} + a_2 S^{\lambda_2} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 =& \frac{-(\beta-1) - \sqrt{(\beta-1)^2 + \frac{4\alpha}{h})}}{2} \\ \lambda_2 =& \frac{-(\beta-1) + \sqrt{(\beta-1)^2 + \frac{4\alpha}{h})}}{2}\end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że $g_2 = \varepsilon g_1$. Jak napisaliśmy wcześniej hg_2 jest poprawką na hg_1, a więc względnie powinno być małe czyli $\varepsilon < M$. Przy takiej postaci g_2 otrzymujemy, że

$$V = (1 + \varepsilon)hg_1 \tag{13}$$

Brakuje nam warunków początkowych, które by nam determinowały a_1 i a_2. Aby zdeterminować a_1 posłużymy się następującymi faktami nt. zachowania cen opcji amerykańskich i europejskich:

Dla opcji call:

$$\lim_{S\to 0} V_A(S) = 0, \quad \text{oraz} \quad \lim_{S\to 0} V_E(S) = 0 \tag{14}$$

A zatem

$$\lim_{S\to 0} V_A - V_E = \lim_{S\to 0} V = \lim_{S\to 0}(1+\varepsilon)h(a_1 S^{\lambda_1} + a_2 S^{\lambda_2}) = 0 \tag{15}$$

Jako, że $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, a ponadto $(1 + \varepsilon)$ jest ograniczony wnioskujemy, że $a_1 = 0$, bo inaczej ta granica nie będzie zerem.
Musimy jeszcze sprawdzić, co się dzieje gdy $S \to \infty$

$$\lim_{S\to\infty} \frac{V_A(S)}{S} = 1, \quad \text{oraz} \quad \lim_{S\to\infty} \frac{V_E(S)}{S} = 1$$

Zatem

$$\lim_{S\to\infty} \frac{V}{S} = \lim_{S\to\infty} \frac{V_A - V_E}{S} = \lim_{S\to\infty}(1+\varepsilon)ha_2 S^{\lambda_2 - 1} = 0$$

Spełnione to jest wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_2 < 1$.

Dla opcji put:

$$\lim_{S\to\infty} V_A(S) = 0, \quad \text{oraz} \quad \lim_{S\to\infty} V_E(S) = 0 \tag{16}$$

A zatem

$$\lim_{S\to\infty} V_A - V_E = \lim_{S\to\infty} V = \lim_{S\to\infty} h(1+\varepsilon)(a_1 S^{\lambda_1} + a_2 S^{\lambda_2}) = 0 \tag{17}$$

Jako, że $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, a ponadto $(1+\varepsilon)$ jest ograniczony wnioskujemy, że $a_2 = 0$, bo inaczej ta granica nie będzie zerem. Musimy jeszcze sprawdzić, co się dzieje gdy $S \to 0$

$$\lim_{S\to 0} V_A(S) = K, \quad \text{oraz} \quad \lim_{S\to 0} V_E(S) = K$$

Zatem

$$\lim_{S\to 0} V_A - V_E = \lim_{S\to 0} V = \lim_{S\to 0} (1+\varepsilon) h a_1 S^{\lambda_1} = 0$$

Stąd możemy uprościć zapis g_1 uwzględniający powyższe warunki na a_1 i a_2 w następujący sposób:

$$g_1 = aS^{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{-(\beta-1) + \phi\sqrt{(\beta-1)^2 + \frac{4\alpha}{h}}}{2} \tag{18}$$

Aby obliczyć V pozostaje nam wyznaczenie postaci ε. Podstawiając $g_2 = \varepsilon g_1$ do równania 10 na g_2 otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
0 =& S^2 \frac{\partial^2 g_2}{\partial S^2} + \beta S \frac{\partial g_2}{\partial S} - \frac{\alpha}{h} g_2 + (1-h(\tau))\alpha\left(\frac{\partial g_1}{\partial h} + \frac{\partial g_2}{\partial h}\right) \\
=& S^2 \frac{\partial^2 \varepsilon g_1}{\partial S^2} + \beta S \frac{\partial \varepsilon g_1}{\partial S} - \frac{\alpha}{h} \varepsilon g_1 + (1-h(\tau))\alpha\left(\frac{\partial g_1}{\partial h} + \frac{\partial \varepsilon g_1}{\partial h}\right), \\
=& S^2 \left(g_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S^2} + 2 \frac{\partial g_1}{\partial S}\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} + \varepsilon \frac{\partial^2 g_1}{\partial S^2}\right) + \beta S\left(g_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial S} + \varepsilon \frac{\partial g_1}{\partial S}\right) - \frac{\alpha}{h}\varepsilon g_1 \\
&+ (1-h(\tau))\alpha\left(\frac{\partial g_1}{\partial h} + \left(g_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} + \varepsilon \frac{\partial g_1}{\partial h}\right)\right) \\
&\text{dzieląc przez } g_1 \text{ dostajemy} \\
=& S^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S^2} + \left(S^2 \frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial S} + \beta S\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} + (1-h(\tau))\alpha\left((1+\varepsilon)\frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial h} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial h}\right) \\
&+ \frac{\varepsilon}{g_1}\left(S^2 \frac{\partial^2 g_1}{\partial S^2} + \beta S\left(\frac{\partial g_1}{\partial S}\right) - \frac{\alpha}{h} g_1\right) \\
&\text{robiąc podstawienie z równania (9) otrzymujemy} \\
=& S^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S^2} + \left(S^2 \frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial S} + \beta S\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} + (1-h(\tau))\alpha\left((1+\varepsilon)\frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial h} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial h}\right)
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamości

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon g_1}{\partial S} &= g_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial S} + \varepsilon \frac{\partial g_1}{\partial S}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon g_1}{\partial S^2} &= g_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S^2} + 2\frac{\partial g_1}{\partial S}\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} + \varepsilon \frac{\partial^2 g_1}{\partial S^2}, \\
\frac{\partial \varepsilon g_1}{\partial h} &= g_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} + \varepsilon \frac{\partial g_1}{\partial h}.
\end{aligned}$$

Podsumowując powyższe przekształcenia, otrzymaliśmy równanie różniczkowe na ε:

$$S^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S^2} + \left(2S^2 \frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial S} + \beta S\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} - (1-h(\tau))\alpha\left((1+\varepsilon)\frac{1}{g_1}\frac{\partial g_1}{\partial h} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial h}\right) = 0 \tag{19}$$

Pierwsza aproksymacja V zakłada, że $\frac{\partial \varepsilon}{\partial h} = 0$:

$$S^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S^2} + (2S^2 \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial S} + \beta S) \frac{\partial \varepsilon}{\partial S} - (1 - h(\tau))\alpha((1 + \varepsilon) \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial h}) = 0 \tag{20}$$

Drugim krokiem aproksymacyjnym jest rozwiązanie tego równania poprzez założenie $(1 + \varepsilon) = const$ oraz przedstawienie g_1 w postaci zawierającej S^*, gdzie S^* jest najmniejszą ceną instrumentu bazowego dla którego cena opcji amerykańskiej będzie równa wypłacie z tej opcji. ($g_1 = A(h)(\frac{S}{S^*})^\lambda$) Aby rozwiązać równanie (18) stosujemy podstawienie $u = \ln \frac{S}{S^*}$

$$\begin{aligned}
0 =& S^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S^2} + (2S \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial S} + \beta) S \frac{\partial \varepsilon}{\partial S} - (1 - h(\tau))\alpha((1 + \varepsilon) \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial h}) \\
& //S \frac{dg_1}{dS} = \frac{dg_1}{du}, \qquad S \frac{d\varepsilon}{dS} = \frac{d\varepsilon}{du}, \qquad S^2 \frac{d^2 \varepsilon}{dS^2} = \frac{d^2\varepsilon}{du^2} - \frac{d\varepsilon}{du}// \\
u = \ln \frac{S}{S^*}/ =& (\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u^2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}) + (\frac{2}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial u} + \beta) \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - (1 - h(\tau))\alpha((1 + \varepsilon) \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial h}) \\
& //g_1 = A(h)(\frac{S}{S^*})^\lambda = A(h) e^{u\lambda}, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial u} = A(h) \lambda e^{u\lambda} = g_1 \lambda \\
& \frac{\partial g_1}{\partial h} = A'(h) e^{u\lambda} + A(h) e^{u\lambda} (\lambda'(h) u + \lambda \frac{\partial u}{\partial h}) = \frac{A'(h)}{A(h)} g_1 + g_1(\lambda'(h) u + \lambda(h) \frac{\partial u}{\partial h}) \\
& \lambda = \frac{-(\beta - 1) + \phi \sqrt{(\beta - 1)^2 + \frac{4\alpha}{h}}}{2}// \\
=& \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u^2} + (2\lambda + \beta - 1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - (1 - h(\tau))\alpha(1 + \varepsilon)(\frac{A'(h)}{A(h)} + u\lambda'(h) + \lambda(h) \frac{\partial u}{\partial h})
\end{aligned}$$

Niech $P = (2\lambda + \beta - 1)$, natomiast $Q = (1 - h(\tau))\alpha(1 + \varepsilon)\lambda'(h)$, natomiast $R = (1 - h(\tau))\alpha(1 + \varepsilon)(\frac{A'(h)}{A(h)} + \lambda(h) \frac{\partial u}{\partial h})$, mamy zatem niejednorodne równanie różniczkowe postaci:

$$0 = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u^2} + P \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - Qu - R$$

Postać jednorodna:

$$0 = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u^2} + P \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}$$

Zauważmy, że korzystając z metody uzmienniania stałej:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial u} =& c(u) e^{-Pu}, \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u^2} = -P e^{-Pu} c(u) + e^{-Pu} c'(u) \\
0 =& \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u^2} + P \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - Qu - R \\
=& - P e^{-Pu} c(u) + e^{-Pu} c'(u) + P c(u) e^{-Pu} - Qu - R \\
c'(u) =& Que^{Pu} + Re^{Pu} \\
c(u) =& \int uQe^{Pu} du = \frac{Q}{P^2} e^{Pu}(Pu - 1) + \frac{R}{P} e^{Pu} + A \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial u} =& \frac{Q}{P^2} e^{Pu}(Pu - 1) e^{-Pu} + \frac{R}{P} e^{Pu} e^{-Pu} = \frac{Q}{P^2}(Pu - 1) + \frac{R}{P} + Ae^{-Pu} \\
\varepsilon =& \int (\frac{Q}{P^2}(Pu - 1) + \frac{R}{P}) + Ae^{-Pu} du = \frac{Q}{P^2}(P \frac{u^2}{2} - u) + \frac{R}{P} u - \frac{A}{P} e^{-Pu} \\
=& \frac{Q}{2P} u^2 + (\frac{-Q}{P^2} + \frac{R}{P}) u + \frac{A}{P} e^{-Pu} + M
\end{aligned}$$

Gdy $A = 0$. Mamy:

$$\varepsilon = \frac{Q}{2P}u^2 + (\frac{-Q}{P^2} + \frac{R}{P})u + M \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon =& \frac{1}{2}\frac{(1-h(\tau))\alpha(1+\varepsilon)\lambda'(h)}{2\lambda+\beta-1}u^2 + (\frac{-((1-h(\tau))\alpha(1+\varepsilon)\lambda'(h))}{(2\lambda+\beta-1)^2} + \frac{(1-h(\tau))\alpha(1+\varepsilon)(\frac{A'(h)}{A(h)} + \lambda(h)\frac{\partial u}{\partial h}}{2\lambda+\beta-1})u + M \\
=& \frac{1}{2}\frac{(1-h(\tau))\alpha(1+\varepsilon)\lambda'(h)}{2\lambda+\beta-1}u^2 + \frac{((1-h(\tau))\alpha(1+\varepsilon)}{2\lambda+\beta-1}(\frac{A'(h)}{A} + \lambda(h)\frac{\partial u}{\partial h} - \frac{\lambda'(h)}{2\lambda+\beta-1})u + M \\
=& b(1+\varepsilon)u^2 + c(1+\varepsilon)u + M
\end{aligned}$$

Zakładając, że $M = 0$ otrzymujemy $\varepsilon = b(1+\varepsilon)u^2 + c(1+\varepsilon)u$, czyli:

$$\varepsilon = b(1+\varepsilon)u^2 + c(1+\varepsilon)u \tag{22}$$

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = bu^2 + cu = \chi \tag{23}$$

$$\varepsilon = \frac{\chi}{1-\chi} \tag{24}$$

Ponadto b, c, ξ wyrażają się następującymi wzorami:

$$b = \frac{\xi}{2}\lambda'(h), \quad c = \xi(\frac{A'(h)}{A(h)} - \lambda(h)\frac{1}{S^*}\frac{\partial S^*}{\partial h} - \frac{2b}{(1-h)\alpha}), \quad \xi = \frac{(1-h)\alpha}{2\lambda+\beta-1} \tag{25}$$

Ostatecznie V przyjmuje postać:

$$V = (1+\varepsilon)hg_1 = \frac{hA(h)e^{u\lambda}}{1-bu^2+cu} = h\frac{A(h)(\frac{S}{S^*})^\lambda}{1-b\ln^2(S/S^*) + c\ln(S/S^*)}$$

Zauważmy, że jeśli cena aktywa wzrośnie w danej chwili do pewnej ceny S^* to nikt nie będzie chciał trzymać opcji i jej nie wykonywać, bo wypłata od razu będzie bardzo wysoka, a oczywiście europejską opcję inwestor musiałby trzymać. Dlatego też wypłata z opcji amerykańskiej będzie wtedy równa cenie opcji amerykańskiej, a zatem też sumie ceny opcji europejskiej i early exercise premium.

$$\phi(S^* - K) = V_E(S^*) + V(S^*)$$

Dla S^*, z uwagi na : $V(S^*) = h\frac{a(S^*)^\lambda}{1-b\ln^2((S^*)/S^*)+c\ln((S^*)/S^*)} = ha(S^*)^\lambda$

$$\phi(S^* - K) = V_E(S^*) + ha(S^*)^\lambda$$

Możemy oczywiście też obustronnie zróżniczkować po S

$$\phi = \frac{d(V_E(S^*))}{dS^*} + \frac{d(ha(S^*)^\lambda)}{dS^*}$$

Mamy oczywiście wzór B-S na $V_E(S)$ oraz na $\frac{\partial V_E(S)}{\partial S}$

$$V_E(S) = \phi S_0\exp(-dT)\Phi(\phi d_1) - \phi K\exp(-rT)\Phi(\phi d_2)$$

$$\frac{\partial V_E(S)}{\partial S} = \phi\exp(-dT)\Phi(\phi d_1)$$

gdzie oczywiście

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S^*}{K}) + ((r-d) + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln(\frac{S^*}{K}) + ((r-d) - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\phi = \phi \exp(-dT)\Phi(\phi d_1) + \lambda h a (S^*)^{\lambda-1}$$
$$a = \frac{\phi(1-\exp(-dT)\Phi(\phi d_1))}{\lambda h (S^*)^{\lambda-1}}$$

Stąd mamy dwie rzeczy: po pierwsze jesteśmy w stanie podstawić a do wyrażenia na g_1 i dzięki temu otrzymujemy jawny wzór na $A(h)$.

$$g_1 = aS^\lambda = \frac{\phi(1-\exp(-dT)\Phi(\phi d_1))}{\lambda h (S^*)^{\lambda-1}} S^\lambda$$

Teraz wreszcie możemy zdefiniować funkcję $A(h)$, którą wcześniej przyjęliśmy za zadaną, lecz bez definicji. $A(h)$ to funkcja spełniająca następującą równość:

$$g_1 = A(h)(\frac{S}{S^*})^\lambda$$

Z powyższego mamy:

$$g_1 = aS^\lambda = \frac{\phi(1-\exp(-dT)\Phi(\phi d_1))}{\lambda h (S^*)^{\lambda-1}} S^\lambda = A(h)(\frac{S}{S^*})^\lambda$$

Stąd też:

$$A(h) = S^* \frac{\phi(1-\exp(-dT)\Phi(\phi d_1))}{\lambda h} \tag{26}$$

Drugą rzeczą, którą otrzymujemy z wyliczenia formuły na a to wyznaczenie S^*:

$$\phi(S^* - K) = V_E(S^*) + h \frac{\phi(1-\exp(-dT)\Phi(\phi d_1))}{\lambda h (S^*)^{\lambda-1}} (S^*)^\lambda$$

$$\phi(S^* - K) = V_E(S^*) + S^* \frac{\phi(1-\exp(-dT)\Phi(\phi d_1))}{\lambda}$$

Mnożąc obie strony równania przez $\frac{\phi\lambda}{K}$ mamy:

$$\frac{\lambda}{K} S^* - \lambda = \frac{\lambda}{K} \phi V_E(S^*) + \frac{S^*}{K}(1-\exp(-dT)\Phi(\phi d_1))$$

Po przeniesieniu wszystkich składników na prawą stronę:

$$0 = \frac{1-\lambda}{K} S^* + \frac{\lambda}{K} \phi V_E(S^*) - \frac{S^*}{K} \exp(-dT)\Phi(\phi d_1) + \lambda$$

a następnie skorzystaniu ze wzoru na cenę opcji europejskiej:

$$0 = \frac{1-\lambda}{K} S^* + \frac{\lambda}{K} \phi V_E(S^*) - \frac{1}{K}(\phi V_E(S^*) + K \exp(-rT)\Phi(\phi d_2)) + \lambda$$

dostajemy równanie:

$$0 = \frac{1-\lambda}{K}(S^* - \phi V_E(S^*)) - \exp(-rT)\Phi(\phi d_2) + \lambda$$

Niech

$$F(S) = \frac{1-\lambda}{K}(S - \phi V_E(S)) - \exp(-rT)\Phi(\phi d_2) + \lambda \tag{27}$$

Wobec tego S^* jest miejscem zerowym funkcji F, które możemy znaleźć numerycznie.

Podsumowując posiadamy jawny wzór na obliczenie *early exercise premium* oraz S^* (który ma kluczowy wpływ na moment wykonania opcji). Zatem cena opcji amerykańskiej w zależności od S^* prezentuje się następująco:

$$V_A(S) = \begin{cases} \phi(S-K), & \phi(S^* - S) \leq 0 \\ V_E + V, & \phi(S^* - S) > 0 \end{cases}, \quad \text{gdzie} \quad V = \frac{hA(h)e^{\lambda \ln \frac{S}{S^*}}}{1-\chi} \tag{28}$$

Odwracając powyższy wzór ze względu na σ otrzymamy szukaną wartość *implied volatility*.

Zajmiemy się teraz uproszczeniem wzoru na c. Przypomnijmy najpierw, że dla $S = S^*$ podane wyżej wzory na $V_A(S)$ dają ten sam wynik, więc zachodzi równość:

$$\phi(S^* - K) = V_E(S^*) + hA(h)$$

Różniczkując po h otrzymujemy:

$$\begin{aligned} hA'(h) &= \phi\frac{\partial S^*(h)}{\partial h} - \frac{\partial V_E(S^*, h)}{\partial h} - \frac{\partial V_E(S^*, h)}{\partial S^*}\frac{\partial S^*(h)}{\partial h} - A(h) \\ &= \phi(1 - \exp(-dT)\Phi(\phi d_1(S^*)))\frac{\partial S^*(h)}{\partial h} - \frac{\partial V_E(S^*, h)}{\partial h} - A(h) \end{aligned}$$

Wracając do wzoru (25) na c mamy:

$$\begin{aligned} c &= \xi(\frac{A'(h)}{A(h)} - \lambda\frac{1}{S^*}\frac{\partial S^*}{\partial h} - \frac{2b}{(1-h)\alpha}) \\ &= \phi\xi(\frac{1 - \exp(-dT)\Phi(\phi d_1(S^*))}{hA(h)} - \frac{\phi\lambda}{S^*})\frac{\partial S^*(h)}{\partial h} - \xi(\frac{1}{hA(h)}\frac{\partial V_E(S^*, h)}{\partial h} + \frac{1}{h} - \frac{2b}{(1-h)\alpha}) \\ &= -\xi(\frac{1}{hA(h)}\frac{\partial V_E(S^*, h)}{\partial h} + \frac{1}{h} - \frac{2b}{(1-h)\alpha}) \end{aligned}$$

gdyż pierwsze wyrażenie w drugiej linijce jest równe 0 na mocy wzoru (26). Ponadto:

$$\frac{\partial V_E(S^*, h)}{\partial h} = \frac{\partial V_E(S^*, T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial h} = \frac{S^*\varphi(d_1(S^*))\sigma e^{(r-d)T}}{2r\sqrt{T}} - \frac{\phi d S^*\Phi(\phi d_1(S^*))e^{(r-d)T}}{r} + \phi K\Phi(\phi d_2(S^*))$$

gdzie φ jest gęstością standardowego rozkładu normalnego.

1.4 Interpolacja Fenglera

Celem interpolacji jest stworzenie na podstawie cen opcji takiej powierzchni implied volatility, aby wykluczyć możliwość arbitrażu. Co ciekawe algorytm działa nawet wtedy, gdy dane wejściowe nie są bezarbitrażowe. Dzieje się tak dlatego, że metoda nie polega na interpolowaniu pomiędzy danymi, a stworzeniu pewnej krzywej, która przebiega w pobliżu danych. Przedstawiany opis dotyczy opcji call, jednak w analogiczny sposób można stworzyć powierzchnię implied volatility mając do dyspozycji ceny opcji put. Danymi wejściowymi dla tej interpolacji są zmienności wygenerowane metodą I lub metodą II.

1.4.1 Opis metody

Na początku dla uproszczenia rozpatrzmy sytuację, gdy mamy opcje zapadające w tym samym terminie zapadalności. Niech $\{(u_i, y_i)\}_{i=1}^n$ będzie zbiorem danych, gdzie u_i są strike'ami, zaś y_i odpowiadającymi im cenami opcji call. Dla uproszczenia zakładamy, że strike'i są uporządkowane rosnąco. Metoda polega na znalezieniu splajnu kubicznego naturalnego g o węzłach w punktach u_i, który minimalizuje wyrażenie:

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(y_i - g(u_i)\Big)^2 + \lambda\int_{u_1}^{u_n}\Big(g''(x)\Big)^2 dx. \tag{29}$$

Okazuje się, że tak postawione zagadnienie można sprowadzić do minimalizowania funkcji kwadratowej, co rozwiązuje się łatwo i szybko. Jak to zrobić?

Splajn kubiczny można opisać przez wartości splajnu w węzłach oraz wartości drugich pochodnych splajnu w węzłach. Splajn naturalny ma zerowe drugie pochodne w skrajnych węzłach, dlatego do opisu splajnu wystarczy n wartości funkcji oraz $n-2$ wartości drugich pochodnych. Wprowadźmy oznaczenie $g_i = g(u_i)$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$

oraz $\gamma_i = g''(u_i)$ dla $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ oraz $g = (g_1, \ldots, g_n)^T$, $\gamma = (\gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1})^T$. Jest tu pewna kolizja oznaczeń, g oznacza zarówno funkcję jak i ciąg wartości funkcji, ale nie powinno prowadzić to do nieporozumień, a tak jest u Fenglera i dzięki zachowaniu oznaczeń łatwiej można śledzić pracę. Nie każdy ciąg (g, γ) odpowiedniego wymiaru odpowiada splajnowi kubicznemu naturalnemu. Zaraz podamy warunek kiedy tak jest. W tym celu trzeba zdefiniować pewne macierze Q i R.

Niech $h_i = u_{i+1} - u_i$ dla $i = 1, \ldots, n-1$. Trójdiagonalna macierz Q wymiaru $n \times (n-2)$ zdefiniowana jest następująco:

$$q_{j-1,j} = h_{j-1}^{-1}, \quad q_{j,j} = -h_{j-1}^{-1} - h_j^{-1}, \quad q_{j+1,j} = h_j^{-1}$$

dla $j = 2, \ldots, n-1$ tzn. kolumny macierzy Q są numerowane tak samo jak współrzędne wektora γ. Wzór na działanie $Q^T g$ ma postać (uwaga: wzór w pracy [3] jest niepoprawny)

$$\frac{1}{h_i} g_{i+1} - \Big(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}}\Big) g_i + \frac{1}{h_{i-1}} g_{i-1}.$$

Z kolei R jest symetryczną trójdiagonalną macierzą kwadratową wymiaru $(n-2) \times (n-2)$, gdzie

$$r_{i,i} = \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i) \quad \text{dla } i = 2, \ldots, n-1$$

oraz

$$r_{i,i+1} = r_{i+1,i} = \frac{1}{6} \quad \text{dla } i = 2, \ldots, n-2.$$

Mając macierze Q i R można sformułować dwa fakty, na których bazuje algorytm:

1. Wektory g i γ opisują splajn kubiczny naturalny wtedy i tylko wtedy, gdy $Q^T g = R\gamma$.
2. Wówczas:

$$\int_{u_1}^{u_n} \Big(g''(x)\Big)^2 dx = \gamma^T R \gamma$$

Dowód powyższego twierdzenia można przeczytać w książce [4]. Skupimy się teraz na wykorzystaniu powyższych faktów.

Aby sformułować zagadnienie minimalizacyjnej zdefiniujmy dwa wektory o $2n-2$ współrzędnych: $x = (g^T, \gamma^T)^T$ oraz $y = (y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots, 0)^T$, a ponadto dwie macierze o wymiarach $(2n-2) \times (2n-2)$:

$$A = \begin{pmatrix} Q \\ -R^T \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} Id_n & 0 \\ 0 & \lambda R \end{pmatrix},$$

gdzie Id_n jest macierzą identycznościową wymiaru n, zaś $\lambda > 0$ jest parametrem decydującym jak bardzo wypukły będzie otrzymany splajn.

Zagadnienie minimalizacji wyrażenia (29) można zatem sformułować jako zagadnienie programowania kwadratowego:

$$\begin{cases} min_x \ \frac{1}{2} x^T B x - y^T x \\ A^T x = 0 \end{cases} \tag{30}$$

Zgodnie z przytoczonymi faktami warunek $A^T x = 0$ oznacza, że wektor x zadaje splajn kubiczny naturalny. Zatem rozwiązanie problemu (30) jest odpowiednim splajnem, jednak może nie spełniać naturalnych własności, jakich oczekujemy od bezarbitrażowej funkcji ceny opcji w zależności od ceny wykonania.

1.4.2 Dodatkowe ograniczenia

Wiadomo, że cena opcji call jako funkcja strike'a powinna być nieujemna, malejąca i wypukła. We współczynnikach definiujących splajn przekłada się to na warunki:

$$\begin{cases} g_n \geq 0 \\ \gamma_i \geq 0 \\ g_{n-1} - g_n \geq 0 \end{cases} \tag{31}$$

Dodatkowo spełnione muszą być "warunki brzegowe":

$$\begin{cases} \frac{g_2 - g_1}{u_2 - u_1} \geq -e^{-r\tau} \\ e^{-\delta\tau} S_0 - e^{-r\tau} u_1 \leq g_1 \leq e^{-\delta\tau} S_0 \end{cases} \tag{32}$$

gdzie S_0 jest bieżącą ceną aktywa bazowego, r jest bezryzykowną stopą procentową, zaś δ jest stopą dywidendy. Ostatecznie rozwiązać należy następujące zadanie minimalizacyjne:

$$\begin{cases} min_x \ \frac{1}{2} x^T B x - y^T x \\ A^T x = 0 g_n \geq 0 \\ \gamma_i \geq 0 \\ g_(n-1) - g_n \geq 0 \\ \frac{g_2 - g_1}{u_2 - u_1} \geq -e^{-r\tau} \\ g_1 \geq e^{-\delta\tau} S_0 - e^{-r\tau} u_1 \\ g_1 \leq e^{-\delta\tau} S_0 \end{cases} \tag{33}$$

Gdy znamy wartości wektora $x = (g^T, \gamma^T)^T$ to splajn zadany jest dla $z \in [u_i, u_{i+1}]$ wzorem:

$$g(z) = \frac{(z - u_i) g_{i+1} + (u_{i+1} - z) g_i}{h_i} - \frac{1}{6}(z - u_i)(u_{i+1} - z)\left\{\left(1 + \frac{z - u_i}{h_i}\right)\gamma_{i+1} + \left(1 + \frac{u_{i+1} - z}{h_i}\right)\gamma_i\right\}$$

Z kolei na zewnątrz przedziału $[u_1, u_n]$ splajn rozszerzany jest liniowo, tzn.

$$g(z) = g_1 - (u_1 - z) g'(u_1) \quad dla \quad z < u_1,$$
$$g(z) = g_n - (z - u_n) g'(u_n) \quad dla \quad z > u_n,$$

gdzie wartości pochodnych wyrażone są wzorami:

$$g'(u_1) = \frac{g_2 - g_1}{u_2 - u_1} - \frac{1}{6}(u_2 - u_1)\gamma_2,$$
$$g'(u_n) = \frac{g_n - g_{n-1}}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{6}(u_n - u_{n-1})\gamma_{n-1}.$$

1.4.3 Wiele czasów zapadalności

Na rynku istnieją opcje o różnych czasach zapadalności dla danego aktywa bazowego, dlatego ważne jest też wyznaczanie ceny w zależności od terminu zapadalności. W tym celu nie wystarczy przeprowadzić omówionej już procedury dla każdego z terminów zapadalności z osobna, bowiem mogłoby to doprowadzić do arbitrażu po czasie.

Załóżmy, że opcje zapadają w terminach $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m$. Dla czasu τ_m należy rozwiązać problem (33), a następnie po kolei znajdować ceny dla czasów coraz wcześniejszych. Jedyną zmianą dla wcześniejszych czasów τ_j jest zastąpienie nierówności $g_1 \leq e^{-\delta\tau} S_0$ poprzez nierówności:

$$g_i^{(j)} < e^{\int_{\tau_j}^{\tau_j+1} \delta_t dt} g_i^{(j+1)}, \tag{34}$$

gdzie $g_i^{(j)}$ oznacza wartość splajnu odpowiadającego czasowi zapadalności τ_j w i-tym strike'u.

W nierówności (34) $g_i^{(j)}$ oraz $g_i^{(j+1)}$ odnoszą się w rzeczywistości nie do tej samej ceny realizacji (strike), ale do tej samej forward-moneyness (patrz Proposition 2.1 w [3]). Aby poradzić sobie z tym problemem dla wartości u_i (czyli ustalonej wartości strike) w chwili τ_j znajdowana jest wartość strike $\hat{u}_i$ w chwili τ_{j+1}, która odpowiada tej samej wartości forward-moneyness

$$\hat{u}_i = u_i \exp\Big(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (r_t - \delta_t) dt\Big).$$

Następnie metodą interpolacji kubicznej znajdowana jest cena opcji odpowiadająca $\hat{u}_i$ w chwili τ_{j+1}. Te wartość przyjmujemy jako $g_i^{(j+1)}$ we wzorze (34). W ten sposób definiuje się ograniczenie przy przejściu od τ_j do τ_{j+1}.

2 Dokumentacja

W tej części opiszemy działnie wszystkich funkcji zawartych w pliku `volatility_equity_function.m` (dodatkowo pozostawiono opis funkcji z pliku `implied_volatility_function.m` ale te funkcje nie są wykorzystywane) oraz `imp_vol_am.m`.

2.1 Plik `volatility_equity_function.m`

W pliku tym tworzona jest powierzchnia zmienności implikowanej dla opcji europejskich. Pierwszym krokiem jest tworzenie siatki cen realizacji oraz czasów zapadalności, na której następnie przeprowadzana jest interpolacja w celu zapewnienia braku arbitrażu. Cała powierzchnia zapisywana jest w pliku `vol_equity_tables.m`.

2.1.1 Format danych wejściowych

Aby móc wykorzystać opisaną wcześniej metodę potrzebujemy danych rynkowych. Dane te powinny znajdować się w pliku `EQ_VOL.m` powstałym z danych wprowadzonych w postaci pliku csv.
Format danych powinien wyglądać następująco:

- Krótka data wygaśnięcia opcji - typ *string* 'mmmrr'; np."Aug14", "Jan13"
- Strajk opcji - typ *numeric*; np. 590.000000
- Cena opcji call - typ *numeric*; np. 46.150000
- Cena opcji put - typ *numeric*; np. 13.150000

2.1.2 `market_vol_equity_gen()`

1. **Opis**: tworzy plik `market_vol_equity.m`, przygotowuje dane (pełna data wygaśnięcia opcji, ceny wykonania, zmienności i współczynniki dyskontowe) do późniejszego użycia
2. **Input**:
3. **Output**: plik `market_vol_equity.m`

`findMaturityDate`

1. **Opis**: Funkcja odliczająca pełną datę zapadalności na postawie krótkiej daty typu "jan14". Funkcja polega na wyznaczeniu z tego skrótu roku, miesiąca i znalezieniu konkretnego dnia w którym instrument zapada na podstawie podanej metody (np. Trzecia sobota miesiąca).
2. **Input**:
   - *abbrev* - krótka data typu "Jan14"
   - *method* - metoda np. "3rdSaturday"
3. **Output**: *matdate* - pełna data zapadalności instrumentu. Typ *string* 'dd-mmm-rrrr'; np. "16-Aug-2014", "15-Jan-2013"

2.1.3 `create_vol_equity_table()`

1. **Opis**: Funkcja, która tworzy macierz zmienności implikowanych odpowiadających odpowiednim strajkom oraz czasom zapadalności. Tutaj wykonuje się interpolację Fenglera, w celu zapewnienia braku arbitrażu. Funkcja te wybiera również odpowiedni zestaw strajków do obliczeń.
2. **Input**: dane z pliku `market_vol_equity.m`
3. **Output**: plik `vol_equity_tables.m` zawierający tablicę `volatility_grid` z obliczonymi zmiennościami implikowanymi dla opcji europejskich, `K_grid` z odpowiednimi strajkami oraz `T_grid` z odpowiednimi czasami zapadalności opcji

`fenglerInterp`

1. **Opis**: funkcja licząca zmienność implikowaną dla zadanych stike'a i czasu zapadalności (tworzy gęstą siatkę)
2. **Input**:
   - *strikes_new* - wektor wybranych strajków,
   - *callPrices_new* - wektor cen opcji,
   - *discount_factors* - wektor czynników dyskontowych w momentach zapadalności,
   - *ivTable_Tgrid* - tablica dat zapadalności (wszystkie daty w tablicy są różne),
   - *strikes_len* - długość wektora strike.
3. **Output**: *vol_table* i *KT_grid*. *vol_table* – tablica zmienności implikowanych; i-ty wiersz odpowiada i-temu czasowi zapadalności z tablicy *ivTable_Tgrid*, a j-ta kolumna j-temu strike'owi z wektora *KT_grid*.

`splineValue`

1. **Opis**: funkcja licząca wartości splajnu w zadanych punktach
2. **Input**:
   - *a* - wektor punktów, w których mają być liczone wartości splajnu
   - *knotsValues* - wartości splajnu w węzłach
   - *knotsSecondDerivatives* - wektor wartości drugich pochodnych w wewnętrznych węzłach splajnu (na krańcach drugie pochodne są równe 0)
   - *u* - wektor węzłów splajnu
3. **Output**: wektor wartości splajnu (w punktach wektora a)

2.1.4 `ImpVol`

1. **Opis**: Funkcja oblicza zmienność implikowaną dla podanych danych. To jest główna funkcja wywoływana przy obliczaniu cen opcji.
2. **Input**: *strike*, *start_d* – start_date opcji , *expire_d* – expire_date opcji.
3. **Output**: zmienność implikowana opcji.

2.1.5 Funkcje pomocnicze

`VE_BS`

1. **Opis**: Funkcja wyliczająca cenę opcji call/put według wzoru Blacka-Scholesa. (działa wektorowo)
2. **Input**: *F* - cena forward, *K* - strike, *T* - czas do zapadalności, *DFQ* - czynnik dyskontowy, *sigma*, *phi* (typ opcji),
3. **Output**: Cena opcji *VE_BS*

`BS_inv`

1. **Opis**: Funkcja odwracająca wzór Blacka-Scholesa. Niewiadomą jest zmienność implikowana (*sigma_I*). W zależności od typu opcji otrzymujemy *sigma_I_call* lub *sigma_I_put*
2. **Input**: *K*,*F*, *T*, *DFQ*, *sigma_start* (wartość początkowa), *phi* (typ opcji), *V_target* - rzeczywista cena opcji,
3. **Output**: zmienność implikowana

`VolsInTime`

1. **Opis**: Funkcja zwraca wektor volatilities otrzymanych z krzywej volatility smile dla ustalonej wartości strike'a w poszczególnych momentach czasu w *T_grid* (siatce po czasie), przygotowuje dane wejściowe dla funkcji *TimeInterpolate*.
2. **Input**: *strike*.
3. **Output**: wektor volatilities.

`TimeInterpolate`

1. **Opis**: Funkcja dla danych na wejściu zmienności dla ustalonej wartości strike'a w kolejnych momentach czasu oblicza wartość zmienności implikowanej dla tego strike'a oraz czasu do zapadalności wynikającego z podanych dat. Stosuje się interpolację po czasie: liniową względem volatility lub liniową względem wariancji.
2. **Input**: *start_date*, *expire_date*, *vols* – wektor volatilities otrzymanych z volatility grid dla danego strike'a w poszczególnych momentach czasu w *T_grid* (siatce po czasie).
3. **Output**: wartość zmienności implikowanej dla okresu między *start_date* a *expire_date*.

`VOL`

1. **Opis**: Funkcja zwraca wartość volatility dla podanego strike, ceny opcji oraz daty zapadalności. Uwzględniono rzeczywiste daty przepływów finansowych dla płatności premii opcyjnej oraz wypłaty z opcji.
2. **Input**: *expiry*, *strikes*, *option prices*, *phi* – typ opcji call (1), put (-1).
3. **Output**: *sigmas*.

`DIV_curve_constr`

1. **Opis**: Tworzy tablicę `DS_div` czynników dyskontowych dla podanej wartości stopy dywidendy `DIV_rate`. Tablica ma identyczną strukturę jak tablice czynników dyskontowych stóp procentowych.
2. **Input**:
3. **Output**: tablica `DS_div`.

2.2 Plik `implied_volatility_function.m`

Plik `implied_volatility_function.m` zawiera jedną główną funkcję `calculate_IV_const_maturity`, która ma za zdanie wyznaczenie siatki zmienności implikowanych, oraz kilkanaście funkcji pomocniczych.

2.2.1 Główna funkcja `calculate_IV_const_maturity.m`

Ta funkcja wywoływana jest w pliku `vol_equity_function.m` dla ustalonego t i wszystkich dostępnych strajków opcji.

1. **Opis**: Funkcja wylicza dla każdego strajku zmienność implikowaną wykorzystując przy tym dane dostępne na rynku.
2. **Input**:
   - *CallPrices* - wektor cen opcji call,
   - *PutPrices* - wektor cen opcji put,
   - *Strikes* - wektor Strajków opcji,
   - *S0_at_start_date* - cena instrumentu bazowego w dniu zawarcia kontrkatu opcyjnego,
   - *tgrid* - tgrid - wektor delt czasu narastająco,
   - *discountCurve* - wektor czynników dyskontowych dla narastających delt czasu,
   - *discountCurveF* - wektor czynników dyskontowych zagranicznych dla narastających delt czasu,
   - *metoda* - wybór metody obliczania zmienności implikowanej. Jeżeli `metoda = 1` to obliczamy zmienność metoda pierwszą w.p.p. metoda zaproponowaną przez Y.Shkolnikova.
3. **Output**: *sigma_I*

2.2.2 Funkcje pomocnicze

`d1`

1. **Opis**: Funkcja wyliczająca *d1* do wzoru Blacka-Scholesa. (działa wektorowo)
2. **Input**: *S*, *sigma*, *K*
3. **Output**: *d1*.

`d2`

1. **Opis**: Funkcja wyliczająca *d2* do wzoru Blacka-Scholesa. (działa wektorowo)
2. **Input**: *S*, *sigma*, *K*
3. **Output**: *d2*.

`VE_BS`

1. **Opis**: Funkcja wyliczająca cenę opcji call/put według wzoru Blacka-Scholesa. (działa wektorowo)
2. **Input**: *S*, *sigma*, *phi* (typ opcji), *K*
3. **Output**: Cena opcji *VE_BS*

delta_VE_BS

1. **Opis**: Funkcja wyliczająca deltę opcji call/put według wzoru Blacka-Scholesa. (działa wektorowo)
2. **Input**: *S*, *sigma*, *phi* (typ opcji), *K*
3. **Output**: Zwraca deltę opcji, czyli pochodną ceny po wartości aktywa bazowego

theta_VE_BS

1. **Opis**: Funkcja wyliczająca thetę opcji call/put według wzoru Blacka-Scholesa. (działa wektorowo)
2. **Input**: *S*, *sigma*, *phi* (typ opcji), *K*
3. **Output**: Zwraca thetę opcji, czyli pochodną ceny po czasie

kite_VE_BS

1. **Opis**: Funkcja wyliczająca dye opcji call/put według wzoru Blacka-Scholesa. (działa wektorowo)
2. **Input**: *S*, *sigma*, *phi* (typ opcji), *K*
3. **Output**: Zwraca dye opcji, czyli pochodną ceny po stopie dywidendy

vega_hat

1. **Opis**: Numeryczna pochodna ceny opcji amerykańskiej po zmienności implikowanej sigma_I (działa wektorowo)
2. **Input**: *S*, *sigma_I*, *sigma*, *phi* (typ opcji), *K*, *epsilon*
3. **Output**: vega

vega

1. **Opis**: Numeryczna pochodna ceny opcji amerykańskiej po zmienności aktywa bazowego sigma_U (działa wektorowo)
2. **Input**: *S*, *sigma_I*, *sigma*, *phi* (typ opcji), *K*, *epsilon*
3. **Output**: vega

alpha

1. **Opis**: Funkcja wyliczająca *alphę* - wzór(3)
2. **Input**: *sigma*
3. **Output**: *alpha*.

beta

1. **Opis**: Funkcja wyliczająca *betę* - wzór(3)
2. **Input**: *sigma*
3. **Output**: *beta*.

`lambda`

1. **Opis**: Funkcja wyliczająca *lambdę* - wzór(3)
2. **Input**: *sigma*, *phi* (typ opcji)
3. **Output**: *lambda*.

`findS_star, findS_star2`

1. **Opis**: Funkcja znajdująca $S*$, czyli szukająca miejsca zerowego funkcji (wzór (18) w [1] dla `findS_star`, wzór (24) w [1] dla `findS_star2`)
2. **Input**: *S_start*, *sigma_I*, *sigma*, *phi* (typ opcji), *K*
3. **Output**: Miejsce zerowe funkcji, czyli *S_star*.

`VAIntr`

1. **Opis**: Funkcja obliczająca cenę opcji amerykańskiej - $V_{AIntr} = VE_BS + V$
2. **Input**: *S*, *sigma_I*, *sigma*, *phi* (typ opcji), *K*
3. **Output**: Cena opcji amerykańskiej

`BS_inv`

1. **Opis**: Funkcja odwracająca wzór Blacka-Scholesa. Niewiadomą jest zmienność implikowana (*sigma_I*). W zależności od typu opcji otrzymujemy *sigma_I_call* lub *sigma_I_put*
2. **Input**: *K*, *S*, *sigma_start* (wartość początkowa), *phi* (typ opcji), *V_target*
3. **Output**: zmienność implikowana

`EEP_inv`

1. **Opis**: Funkcja odwracająca earlyExercisePremium. Niewiadomą jest zmienność aktywa bazowego (*sigma_U*). W zależności od typu opcji otrzymujemy *sigma_U_call* lub *sigma_U_put*
2. **Input**: *K*, *S*, *sigma_I*, *sigma_start* (wartość początkowa), *phi* (typ opcji), *V_target*
3. **Output**: zmienność aktywa bazowego

2.3 Plik `imp_vol_am.m`

`EuropeanPrice`

1. **Opis**: Funkcja obliczająca cenę opcji europejskiej według wzoru Blacka-Scholesa
2. **Input**: *S, K, r, d, tau, sigma, phi*
3. **Output**: ve — cena opcji europejskiej, $d1,\ d2$

`F`

1. **Opis**: Funkcja, której miejscem zerowym jest S^* (tzn. wstawiając poniżej $x = S^*$ otrzymujemy wartość 0)
2. **Input**: *x, K, r, d, tau, sigma, phi, lambda*
3. **Output**: wartość funkcji obliczona zgodnie ze wzorem (27)

`AmericanPrice`

1. **Opis**: Funkcja obliczająca cenę opcji amerykańskiej zgodnie ze wzorem (28)
2. **Input**: *S, K, r, d, tau, sigma, phi*
3. **Output**: cena opcji amerykańskiej

`ImpVolAm`

1. **Opis**: Funkcja odwracająca numerycznie wzór (28) ze względu na σ
2. **Input**: *V* (cena opcji amerykańskiej), *S, K, r, d, tau, phi, sigma_min=1e-6, sigma_max=10* (przedział, na którym szukamy rozwiązania σ równania $V = V_A$)
3. **Output**: zmienność implikowana

Literatura

[1] Yuriy Shkolnikov – *Decoupled American Option Pricing Method: Computation of Implied Volatilities and Futher Applications*. Social Science Research Network, June 25, 2009.

[2] Nengjiu Ju, Rui Zhong – *An Approximte Formula for Pricing American Options*. Journal of Derivatives, Winter, 2009.

[3] Matthias R. Fengler – *Arbitrage-free smoothing of the implied volatility surface*. Trading & Derivatives Sal. Oppenhaim jr. & Cie., March 23, 2005.

[4] P. J. Green and B. W. Silverman – *Nonparametric Regression and Generalized Linear Models*, Chapman and Hall, London 1994.

[5] Jacek Jakubowski – *Modele matematyczne rynków instrumentów pochodnych I.* Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki 2011.