Dokumentacja

Portal Mathfinance
Wycena opcji paryskich metodą PDE

Wiktor Madejski

Spis treści

1 Wstęp

Celem niniejszego projektu jest implementacja algorytmów wyceny opcji barierowych paryskich metodą opartą na rozwiązywaniu rówania Blacka-Scholesa. Na podstawie danych rynkowych oraz charakterystyk opcji napisany w Octave program wyznacza parametry równania Blacka-Scholesa wraz z odpowiednimi dla danego kontraktu warunkami brzegowymi i końcowymi, a następnie rozwiązuje to równanie metodą różnic skończonych (schemat Crank-Nicholson lub schemat niejawny). Poza ceną opcji obliczane są także parametry greckie: *delta spot*, *delta forward*, *gamma spot*, *gamma forward*, *theta*, oraz *vega*.

2 Opcje paryskie

Jednobarierowe opcje paryskie są kontraktami, w których własności *in* lub *out* jest aktywowana nie w momencie dotknięcia bariery lecz po pewnym ustalonym z góry czasie przebywania ceny instrumentu bazowego nad lub pod barierą (czas barierowy). Opcje typu paryskiego dzieli się na dwie klasy:

- *Parisian* - W momencie, gdy cena akcji jest równa barierze, czas przebywania nad/pod barierą jest zerowany.
- *Parasian* - Czas przebywania nad/pod barierą jest sumą wszyskich przebywań poza barierą

Wypłata z opcji jest równa wypłacie z opcji europejskiej po spełnieniu warunków zależnych od typu bariery (analogicznie do tradycyjnych opcji barierowych) i zero w przeciwnym przypadku.

2.1 Układ PDE dla opcji paryskich

W dalszym ciągu zajmiemy sie wyłącznie opcjami *Parisian*. Rozpocznijmy od zdefiniowania zmiennej τ, która opisuje czas spędzony nad/pod barierą, ktąry nazwiemy czasem wypadu. Przyrost tego czasu dla opcji typu *out* dany jest wyrażeniem

$$d\tau = \begin{cases} 0 & S \leq B, \\ dt & S > B, \end{cases}$$

gdzie B jest barierą. Dla opcji typu *in* nierówności mają przeciwny kierunek.

Warunek barierowy jest spełniony, kiedy czas wypadu τ osiągnie ustalona z góry wartość $\bar{T}$ zwaną czasem barierowym.

Niech V będzie ceną opcji paryskiej w modelu rynku Blacka-Scholesa. Kiedy cena instrumentu bazowego S jest po tej stronie bariery, po której czas wypadu nie przyrasta, cena opcji jest wyłącznie funkcją zmiennych (S, t) a odpowiednie równanie różniczkowe ma postać

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathbb{L}V = 0, \tag{1}$$

gdzie

$$\mathbb{L}V = \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV.$$

Kiedy cena instrumentu bazowego S jest po tej stronie bariery, po której czas wypadu przyrasta, cena opcji jest funkcją zmiennych (S,t,τ) a odpowiednie równanie różniczkowe ma postać

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial t} + \mathbb{L}V = 0. \tag{2}$$

Aby otrzymać zamkniety układ należy te dwa równania uzupełnić odpowiednimi warunkami granicznymi. Dla uproszczenia rozważań na temat warunków granicznych przyjmijmy w dalszym ciągu, że rozpatrywana bariera jest typu *up-and-out*. Wtedy w obszarze $\mathcal{A}_1 = \{S \le B\}$ obowiązuje pierwsze równanie a w obszarze $\mathcal{A}_2 = \{S > B\}$ drugie równanie. Zauważmy, że obszar $\mathcal{A}_1$ jest obszarem dwuwymiarowym $\mathcal{A}_1 = \{(S,t)\colon t \in [0,T], S \in [0,B]\}$, bo zmienna τ jest w nim stale równa zero, a obszar $\mathcal{A}_2$ jest obszarem trójwymiarowym $\mathcal{A}_2 = \{(S,t,\tau)\colon t \in [0,T], \tau \in [0,\bar{T}], S \in [B,\infty)\}$.

W obszarze $\mathcal{A}_1$ warunek końcowy ma postać

$$V(S,T) = \text{vanilla option end condition.}$$

Także warunek na brzegu $S = 0$ jest oczywisty

$$\lim_{S\to 0} V(S,t) = \text{vanilla option boundary condition.}$$

Nie mamy warunku brzegowego na brzegu $S = B$. Ten problem zostanie omówiony później.

W obszarze $\mathcal{A}_2$ warunek końcowy ma postać

$$V(S,T,\tau) = F(S,\tau), \quad 0 \le \tau \le \bar{T},$$

gdzie F może opisywać skomplikowane wypłaty (np. wypłaty zależne od czasu jaki cena instrumentu bazowego spędziła ponad barierą B). W przypadku waniliowych opcji paryskich $F(S,\tau)$ jest niezależna od τ oraz równa wypłacie ze standardowej opcji waniliowej (call lub put).

Warunek brzegowy dla $S \to +\infty$ jest zależny od czasu t oraz czasu wypadu τ. Jeżli $(\bar{T}-\tau) \le (T-t)$, to dla $S \to +\infty$ cena instrumentu bazowego będzie ponad barierą B do czasu osiągnięcia czasu barierowego $\bar{T}$. Oznacza to, że warunek barierowy zostanie spełniony

$$\lim_{S\to\infty} V(S,t,\tau) = 0, \quad \text{dla } (\bar{T}-\tau) \le (T-t). \tag{3}$$

Jeżli $(\bar{T}-\tau) > (T-t)$, to nie ma dostatecznrej ilości czasu aby czas wypadu osiągnął czas barierowy. Wtedy

$$\lim_{S\to\infty} V(S,t,\tau) = \text{vanilla option boundary condition at infinity}, \quad \text{dla } (\bar{T}-\tau) > (T-t). \tag{4}$$

Warunki brzegowe na brzegu $S = B$ wynikają z warunków ciągłości trajektorii procesu cen instrumentu bazowego S_t. Ten warunek ciągłości daje

$$\lim_{S\nearrow B} V(S,t) = \lim_{S\searrow B} V(S,t,\tau=0). \tag{5}$$

Dodatkowo w obszarze $\mathcal{A}_2$ na płaszczyźnie $S = B$ mamy warunek "reset condition": zawsze, gdy cena S osiągnie od góry wartość B, to czas wypadu τ jest zerowany

$$V(B,t,\tau) = V(B,t,0). \tag{6}$$

Warunek ciągłości (5) nie wystarcza do wyznaczenia ceny opcji na granicy $S = B$. Dodatkowo postuluje się warunek ciągłości delty (*continuous hedge*)

$$\lim_{S\nearrow B} \frac{\partial V(S,t)}{\partial S} = \lim_{S\searrow B} \frac{\partial V(S,t,0)}{\partial S}. \tag{7}$$

Po tym uzupełnieniu optrzymujemy zamknięty układ równań.
W obszarze $\mathcal{A}_1$ mamy następujące zagadnienie graniczne

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} + \mathbb{L}V = 0, \\ &V(S,T) = \text{vanilla option end condition}, \\ &\lim_{S\to 0} V(S,t) = \text{vanilla option boundary condition.} \end{aligned} \tag{8}$$

W obszarze $\mathcal{A}_2$ mamy zagadnienie graniczne

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial t} + \mathbb{L}V = 0, \\ &V(S,T,\tau) = F(S,\tau), \quad 0 \le \tau \le \bar{T}, \\ &V(B,t,\tau) = V(B,t,0), \\ &\lim_{S\to\infty} V(S,t,\tau) = 0, \quad \text{dla } (\bar{T}-\tau) \le (T-t), \\ &\lim_{S\to\infty} V(S,t,\tau) = \text{vanilla option condition at infinity}, \quad \text{dla } (\bar{T}-\tau) > (T-t). \end{aligned} \tag{9}$$

Dodatkowo mamy warunki zgodności rozwiązań w obszarach $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$

$$\begin{aligned} &\lim_{S\nearrow B} V(S,t) = \lim_{S\searrow B} V(S,t,\tau=0), \\ &\lim_{S\nearrow B} \frac{\partial V(S,t)}{\partial S} = \lim_{S\searrow B} \frac{\partial V(S,t,0)}{\partial S}. \end{aligned} \tag{10}$$

2.2 Schemat numeryczny

Wyprowadzony układ równań jest rozwiązywany metodą różnic skończonych. Użytkownikowi pozostaiony jest wybór między schematem Crank-Nicolsona a schematem niejawnym. Dla stabilności obliczeniowej ustalamy tę samą dyskretyzację zmiennych odnoszących się do czasu $(\delta t) = (\delta\tau)$. Niech $V_{i,j}^n$ będzie wartością opcji w punkcie $V\big(i(\delta S), n(\delta t), j(\delta t)\big)$ wtedy

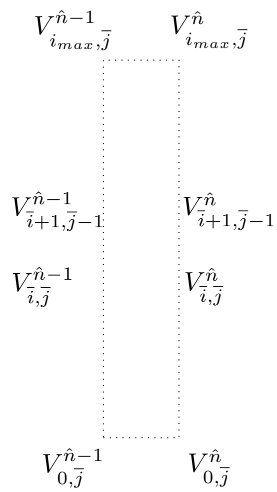
- i=0,1,.., $\bar{i}$,..,i_{max} wyznacza węzły związane z poziomem ceny, a $\bar{i}(\delta S) = (\delta\overline{S})$ jest ceną barierową,

- n=0,1, .., $\overline{n}$ wyznacza węzły związane z czasem do zapadalności $T - t = n(\delta t)$ z wartością graniczną $\overline{n}(\delta t) = T$ będącą momentem zawarcia kontraktu. Co więcej niech $\hat{n} = \overline{n} - \overline{j}$ określa ostatni momentem, w którym z dodatnim prawdopodobieństwem może nastąpić knock-out, jeśli cena nie przekracza bariery.

- j=0,1, .., $\overline{j}$ wyznacza węzły związane z czasem czasem wypadu tj. $\overline{T} - \tau = j(\delta t)$ z wartością graniczną $\overline{j}(\delta t) = \overline{T}$ wyrażającą oddalenie od knock-out'u o całość czasu barrierowego.

Algorytm przechodzi rekurencyjnie wstecz poczynając od węzła $\hat{n}$ w dwóch krokach:

1. Na początku obliczane są wartości brzegowe dla prostokąta wyznaczonego przez następujące punkty

   Cztery wartości wyznaczające prostokąt są dane przez zagadnienie graniczne. Dla $n = \hat{n} - 1$, $i \leq \overline{i}$ oraz $j = \overline{j}$ cena opcji paryskiej jest równa cenie opcji waniliowej, ponieważ w razie ewentualnego przekroczenia bariery zostanie za mało czasu na osiągnięcie czasu barierowego. W celu obliczenia wartości dla $i > \overline{i}$ oraz $n = \hat{n} - 1$ należy obliczyć ceny aktywnej opcji paryskiej sterowaną przez zagadnienie (9), która w chwili $\hat{n}$ wkracza ponad cene barierową. Obliczenie ich jest możliwe ponieważ mamy komplet warunków brzegowych. Jeśli cena powróci do poziomu ceny barierowej to będzie ona tyle samo warta co opcja europejska, w przeciwnym razie nastąpi knock-out z powodu osiągnięcia $\overline{T}$ lub warunku $S \to \infty$.

2. W drugim kroku, dla wszystkich węzłów prócz $i = \overline{i}$, stosowana jest metoda różnic skończonych w celu stworzenia układu równań obliczającego $V^{\hat{n}}_{i,\overline{j}}$ dla $i = 1, .., (i_{max} - 1)$ czyli $i_{max} - 1$ niewiadomych. To pozwala uzyskać $i_{max} - 2$

równań. Ostatnie równanie jest uzyskiwane dzięki warunkowi na ciągłość delty

$$V^{\hat{n}}_{\bar{i},\bar{j}} = \frac{V^{\hat{n}}_{\bar{i}+1,\bar{j}} + V^{\hat{n}}_{\bar{i}-1,\bar{j}}}{2}.$$

Obliczenia dla każdych kolejnych n wynikają z możliwości wyznacznia warunków brzegowych z wartości uzyskanych w poprzednim kroku. Dla $i \leq \bar{i}$ poprzez przepisanie oraz dla $i > \bar{i}$ dzięki możliwości wyliczenia ceny aktywnej opcji paryskiej, która w chwili n wkracza ponad cene barierową. Jest to skutkiem 'reset condition', który pozwala zaktualizować wartości zagadnienia brzegowego dla powrotu ceny do ceny barierowej.

2.3 Uniwersalna funkcja dla opcji paryskkich z wypłatą typu europejskiego

Funkcja parisian_option jest w pełni zintegrowna z silnikiem PDE [1]. Oblicza ona opcje typu knock: up-and-out, up-and-in, down-and-out oraz down-and-in z wypłatą typu europejskiego dla opcji call lub put.

```
   function [y] = parisian_option(S0, K,price_barrier,
name, time_barrier_days, issue_date, expire_date, Mx=1000,
SC, DF_QUOT, DF_BASE, vect_full = true),
```

- S0 ? początkowa cena instrumentu bazowego,
- K - strike,
- price_barrier - bariera cenowa,
- name - nazwa opcji tj. pdoeucall, pdieucall, puoeucall, puieucall, pdoeuput, pdieuput, puoeuput, puieuput, gdzie druga litera określa down lub in, a trzecia up lub out,
- time_barrier_days - bariera czasowa mierzona w dniach,
- issue_date - data wystawienia opcji
- expire_date - data zapadalności opcji,
- Mx - liczba przedziałów w podziale osi cen,
- SC - wybrany schemat numeryczny 0.5 dla schematu Cranka-Nicolsona, 1 dla schematu niejawnego,
- DF_QUOT - krzywa dyskontowa dla waluty kwotowania,

[1]W szczególności discountsCalculate(), BS_solve(), results(),vol() oraz PayoffFunction() są niezbędne do wykonania funkcji

- DF_BASE - krzywa dyskontowa waluty bazowej (stopy dywidendy),
- vect_full - zmienna binarna: dla true zwraca pełny wektor cen dla daty wystawienia opcji, dla false zwraca wektor [V0 ,delta, forward_delta, gamma, forward_gamma, theta] tj. cene opcji dla S0 oraz współczynniki greckie.