

**Uniwersytet Warszawski**  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Anna Niewiarowska**

Nr albumu: 201074

# **Rzutowe, afiniczne i euklidesowe twierdzenia o stożkowych**

Praca magisterska  
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem  
**dra hab. Marka Kordosa**  
Instytut Matematyki

Maj 2007

## **Oświadczenie kierującego pracą**

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## **Oświadczenie autora (autorów) pracy**

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

## **Streszczenie**

W pracy przedstawiłam różne twierdzenia o stożkowych, które są prawdziwe na płaszczyźnie rzutowej, afinicznej i euklidesowej. Pokazałam między innymi dowód twierdzenia Pascala, twierdzenia Brianchona i twierdzenia Ponceleta. Przedstawiłam też zależności między stożkowymi rzutowymi, afinicznymi i euklidesowymi.

## **Słowa kluczowe**

stożkowe, geometria rzutowa, geometria afiniczna, twierdzenie Pascala, twierdzenie Brianchona, twierdzenie Ponceleta

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

11.1 Matematyka

## **Klasyfikacja tematyczna**

51A05 General theory and projective geometries

51E15 Affine and projective planes

## **Tytuł pracy w języku angielskim**

Projective, affine and euclidean theorem about conics



# Spis treści

<b>1. Wstęp</b> . . . . .	5
<b>2. Wprowadzenie do geometrii rzutowej</b> . . . . .	7
2.1. Aksjomaty . . . . .	7
2.2. Modele płaszczyzny rzutowej . . . . .	8
2.2.1. Płaszczyzna euklidesowa z prostą niewłaściwą . . . . .	8
2.2.2. Pęk prostych i płaszczyzn przechodzących przez ustalony punkt w $\mathbb{R}^3$ . . . . .	8
2.3. Podstawowe narzędzia . . . . .	8
2.3.1. Zasada dualności . . . . .	9
2.3.2. Twierdzenie Desarguesa . . . . .	10
2.3.3. Czwórka harmoniczna . . . . .	11
2.4. Przekształcenia płaszczyzny rzutowej . . . . .	12
2.4.1. Rzuty i przekształcenia rzutowe . . . . .	12
2.4.2. Kolineacje i korelacje rzutowe . . . . .	15
<b>3. Stożkowe w geometrii rzutowej</b> . . . . .	17
3.1. Korelacja biegunowa i punkty samosprężone . . . . .	17
3.2. Stożkowe i ich podstawowe własności . . . . .	19
3.3. Twierdzenie Braikenridge'a - MacLaurina, czyli jak wyznaczyć stożkową . . . . .	21
3.4. Twierdzenie Pascala i twierdzenie Brianchona . . . . .	24
3.5. Wielkie twierdzenie Ponceleta . . . . .	25
3.5.1. Pęki stożkowych . . . . .	25
3.5.2. Dowód twierdzenia Ponceleta . . . . .	26
<b>4. Stożkowe w geometrii afinicznej i euklidesowej</b> . . . . .	31
4.1. Stożkowe afiniczne . . . . .	31
4.1.1. Przekształcenia afiniczne . . . . .	31
4.1.2. Płaszczyzna afiniczna a płaszczyzna rzutowa . . . . .	32
4.1.3. Stożkowe . . . . .	33
4.1.4. Klasyfikacja stożkowych afinicznych . . . . .	36
4.2. Stożkowe euklidesowe . . . . .	37
<b>Bibliografia</b> . . . . .	39



# Rozdział 1

## Wstęp

W pracy przedstawiłam różne własności stożkowych oraz twierdzenia o stożkowych na płaszczyźnie rzutowej, afinicznej i euklidesowej. Główna część pracy dotyczy stożkowych rzutowych.

W drugim rozdziale przedstawiłam aksjomaty płaszczyzny rzutowej, pokazałam jej przykładowe modele, a następnie przedstawiłam podstawowe narzędzia, jakich można używać do badania własności tej płaszczyzny. W dalszej części rozdziału opisałam przekształcenia płaszczyzny rzutowej i przedstawiłam ich rozmaite własności.

Trzeci rozdział poświęcony jest stożkowym w geometrii rzutowej. Po zdefiniowaniu stożkowych i pokazaniu ich podstawowych własności przedstawiłam dowody różnych twierdzeń o stożkowych. Przedstawiłam między innymi dowody twierdzenia Pascala i twierdzenia Brianchona. Na koniec rozdziału udowodniłam twierdzenie Ponceleta.

W ostatnim rozdziale opisałam stożkowe w geometrii afinicznej i euklidesowej. Główną częścią tego rozdziału jest pokazanie równoważności między różnymi definicjami stożkowych, w tym także definicją stożkowych rzutowych. Dzięki temu wiemy, że twierdzenia dotyczące stożkowych rzutowych są także prawdziwe (być może w nieco zmodyfikowanej wersji) na płaszczyźnie afinicznej i euklidesowej.





## Rozdział 2

# Wprowadzenie do geometrii rzutowej

W tym rozdziale zdefiniujemy płaszczyznę rzutową i przedstawimy jej podstawowe własności oraz narzędzia, które umożliwiają badanie tych własności. Zajmiemy się również przekształceniami płaszczyzny rzutowej.

### 2.1. Aksjomaty

Płaszczyzna rzutowa składa się z punktów (będziemy je oznaczać małymi literami alfabetu) oraz prostych (oznaczanych dużymi literami). Podstawową rolę odgrywa relacja *incydencji*, którą oznaczamy symbolem  $|$ . Napis  $a|A$  (lub równoważnie  $A|a$ ) znaczy, że punkt  $a$  incyduje z prostą  $A$ . Mówimy wtedy, że punkt  $a$  leży na prostej  $A$ .

Napis  $a_1 \dots a_n|A$  oznacza, że  $\forall_{i=1 \dots n} a_i|A$ . Podobnie,  $a_1 \dots a_n \nmid A$  jest skrótem odpowiadającym:  $\forall_{i=1 \dots n} a_i \nmid A$ .

Zbiór wszystkich punktów, które incydują z jedną prostą, nazywamy *łańcuchem punktów*. Zbiór wszystkich prostych, które incydują z pewnym punktem, nazywamy *pękiem prostych*.

Teraz przedstawimy aksjomaty płaszczyzny rzutowej.

**Aksjomat 2.1**  $ab|AB \Rightarrow a = b \vee A = B$

**Aksjomat 2.2**  $\forall_{a,b} \exists_C ab|C$

**Aksjomat 2.3**  $\forall_{A,B} \exists_c c|AB$

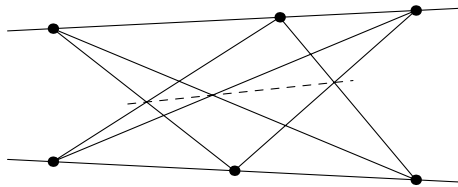
Zastanówmy się, co oznaczają powyższe aksjomaty. Aksjomaty 2.1 oraz 2.2 mówią, że przez dwa punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Aksjomat 2.3 oznacza, że każde dwie proste na płaszczyźnie rzutowej się przecinają.

**Aksjomat 2.4** *Istnieje czworokąt: zbiór czterech punktów, spośród których żadne trzy nie są współliniowe.*

W geometrii rzutowej nie rozróżniamy „boków” i „przekątnych” czworokąta. Każdy czworokąt ma sześć boków.

**Aksjomat 2.5 (aksjomat Fano)** *Punkty przecięcia przeciwległych boków czworokąta nie są współliniowe.*

**Aksjomat 2.6 (tw. Pappusa)** *Jeżeli wierzchołki sześciokąta leżą na przemian na dwóch prostych, to punkty przecięcia par przeciwległych boków tego sześciokąta są współliniowe.*



tw. Pappusa

## 2.2. Modele płaszczyzny rzutowej

Poznaliśmy już aksjomaty, więc teraz nasuwa się pytanie: jak może wyglądać płaszczyzna, dla której wszystkie te aksjomaty są spełnione. W tym podrozdziale przedstawimy dwa standardowe modele.

### 2.2.1. Płaszczyzna euklidesowa z prostą niewłaściwą

Standardową płaszczyznę euklidesową rozszerzamy, dodając punkty niewłaściwe odpowiadające kierunkom prostych. Punkty niewłaściwe tworzą prostą niewłaściwą.

Dwie proste właściwe mają ten sam kierunek (czyli mają wspólny punkt niewłaściwy) wtedy i tylko wtedy, gdy na płaszczyźnie euklidesowej są to proste równoległe. Zatem każde dwie proste właściwe przecinają się w dokładnie jednym punkcie. Prosta właściwa i niewłaściwa również przecinają się w jednym punkcie (odpowiadającym kierunkowi prostej właściwej). W tym modelu spełniony jest więc aksjomat 2.3.

Uzasadnienie, że spełnione są pozostałe aksjomaty, pozostawiam Czytelnikowi.

### 2.2.2. Pęk prostych i płaszczyzn przechodzących przez ustalony punkt w $\mathbb{R}^3$

W tym modelu „punktami” są proste, a „prostymi” — płaszczyzny przechodzące przez pewien ustalony punkt (np.  $(0, 0, 0)$ ) w  $\mathbb{R}^3$ . Mówimy, że „punkt”  $a$  jest incydentny z „prostą”  $A$  wtw. gdy prosta odpowiadająca  $a$  należy do płaszczyzny odpowiadającej  $A$ .

Model ten możemy łatwo uzyskać z poprzedniego: weźmy płaszczyznę  $\alpha$  i umieśćmy ją w  $\mathbb{R}^3$  w taki sposób, żeby nie przechodziła przez punkt  $(0, 0, 0)$ . Każdemu punktowi właściwemu  $a$  płaszczyzny  $\alpha$  odpowiada prosta przechodząca przez  $a$  oraz przez punkt  $(0, 0, 0)$ . Każdemu punktowi niewłaściwemu (kierunkowi) odpowiada prosta równoległa do  $\alpha$  i posiadająca dany kierunek. W ten sposób utworzyliśmy bijekcję między punktami (właściwymi oraz niewłaściwymi)  $\alpha$  oraz prostymi przechodzącymi przez punkt  $(0, 0, 0)$ . Widać, że prostym na płaszczyźnie  $\alpha$  odpowiadają płaszczyzny przechodzące przez  $(0, 0, 0)$ . Prostej niewłaściwej odpowiada płaszczyzna przechodząca przez punkt  $(0, 0, 0)$  i równoległa do płaszczyzny  $\alpha$ .

## 2.3. Podstawowe narzędzia

Wiemy już, jakie są aksjomaty płaszczyzny rzutowej oraz potrafimy sobie taką płaszczyznę wyobrazić. Teraz będziemy chcieli pokazać kilka narzędzi, którymi można się posługiwać do badania własności płaszczyzny rzutowej.

### 2.3.1. Zasada dualności

Każdemu twierdzeniu geometrii rzutowej odpowiada twierdzenie dualne, które możemy otrzymać poprzez zamianę w pierwszym twierdzeniu wyrazów „punkt” oraz „prosta”. Oczywiście należy wtedy odpowiednio zastąpić inne wyrażenia, np. „punkt leży na prostej” przez „prosta przechodzi przez punkt”, „punkty leżą na jednej prostej” przez „proste przecinają się w jednym punkcie” itp. Ta własność nosi nazwę *zasady dualności*.

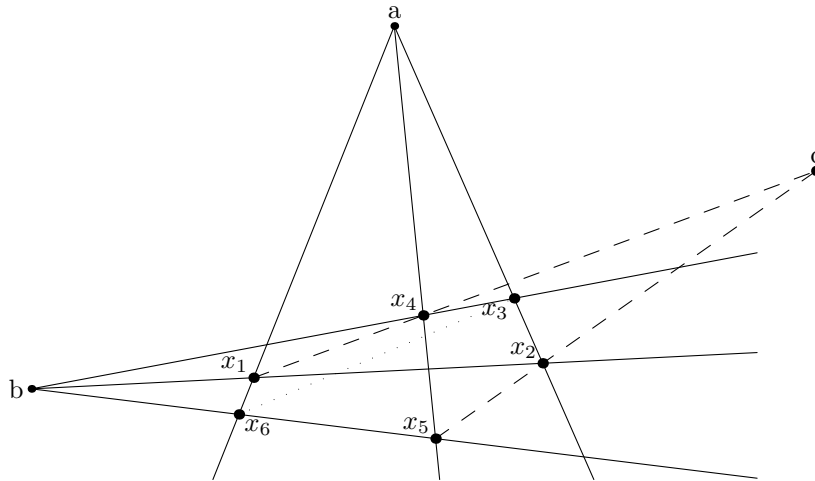
Aby pokazać, że zasada dualności jest prawdziwa, wystarczy uzasadnić, że zachodzi ona dla aksjomatów, czyli dla każdego aksjomatu istnieje aksjomat dualny. Wtedy, biorąc wyprowadzenie dowolnego twierdzenia i zastępując aksjomaty dualnymi, otrzymamy dowód twierdzenia dualnego.

Przyjrzyjmy się teraz aksjomatom. Widzimy, że aksjomat 2.1 jest samodualny. Aksjomatem dualnym do 2.2 jest 2.3 i odwrotnie.

Zobaczymy teraz, jaka jest wersja dualna aksjomatu 2.4. Jest ona następującej postaci: Istnieją cztery proste, spośród których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Istnienie takiej figury (nazywanej czworobokiem) możemy wykazać korzystając właśnie z aksjomatu 2.4: Wiemy, że istnieje czworokąt  $abcd$ . Weźmy dwie pary przeciwległych boków tego czworokąta, np.  $ab, cd$  oraz  $ac, bd$ . Gdyby pewne trzy spośród tych boków przecinały się w jednym punkcie, musiałyby przecinać się w jednym z wierzchołków czworokąta. Ale przez każdy wierzchołek przechodzą dokładnie dwa z tych boków. Zatem  $ab, cd, ac, bd$  jest czworobokiem i aksjomat dualny do 2.4 jest prawdziwy.

Aksjomat dualny do 2.5 jest postaci: Przekątne czworoboku (czyli punkty łączące przeciwległe wierzchołki czworoboku) nie przecinają się w jednym punkcie. Łatwo zauważyć (na przykład wykonując rysunek), że taki warunek jest równoważny aksjomatowi 2.5.

Aksjomat dualny do 2.6 wygląda następująco: Weźmy sześciobok, którego kolejne boki należą do dwóch pęków. Wtedy proste łączące przeciwległe wierzchołki sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.



Niech  $a, b$  będą punktami, przez które przechodzą oba pęki. Kolejne wierzchołki sześcioboku oznaczmy  $x_1 \dots x_6$ . Chcemy pokazać, że proste  $x_1x_4, x_2x_5$  oraz  $x_3x_6$  są współpękowe. Niech  $c = x_1x_4 \cap x_2x_5$ . Wystarczy pokazać, że punkty  $x_3, x_6$  oraz  $c$  są współliniowe. W tym celu należy skorzystać z twierdzenia Pappusa dla sześciokąta  $bx_4x_1ax_2x_5$  wpisanego w proste  $bx_1$  oraz  $ax_4$ .

### 2.3.2. Twierdzenie Desarguesa

Mówimy, że trójkąty  $abc$  oraz  $a'b'c'$  mają *środek perspektywiczny*, jeśli proste  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  są współpękowe. Jeżeli natomiast punkty przecięcia odpowiadających sobie par boków ( $ab$  i  $a'b'$ ,  $ac$  i  $a'c'$ ,  $bc$  i  $b'c'$ ) tych trójkątów leżą na jednej prostej, mówimy, że trójkąty  $abc$  oraz  $a'b'c'$  mają *oś perspektywiczną*.

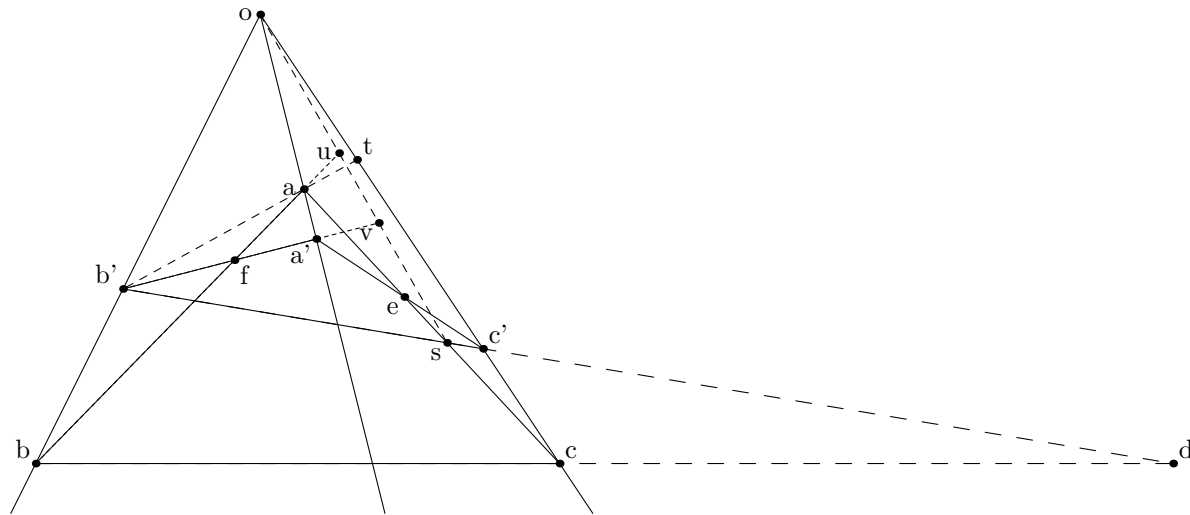
Na płaszczyźnie rzutowej, podobnie jak na płaszczyźnie euklidesowej, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.1 (Desargues)** *Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *trójkąty  $abc$  i  $a'b'c'$  mają środek perspektywiczny,*
- (ii) *trójkąty  $abc$  i  $a'b'c'$  mają oś perspektywiczną.*

**Dowód:** Pokażemy najpierw implikację (i)  $\Rightarrow$  (ii). Niech  $abc$  i  $a'b'c'$  będą trójkątami o środku perspektywicznym  $o$ . Oznaczmy odpowiednio punkty przecięcia odpowiadających sobie boków. Niech  $d = bc \cap b'c'$ ,  $e = ac \cap a'c'$  oraz  $f = ab \cap a'b'$ . Chcemy pokazać, że punkty  $d, e, f$  są współliniowe. Musimy jeszcze wprowadzić kilka dodatkowych oznaczeń:

$s = ac \cap b'c'$ ,  $t = ab' \cap oc$ ,  $u = ab \cap os$ ,  $v = a'b' \cap os$ .



Będziemy teraz korzystać z tw. Pappusa:

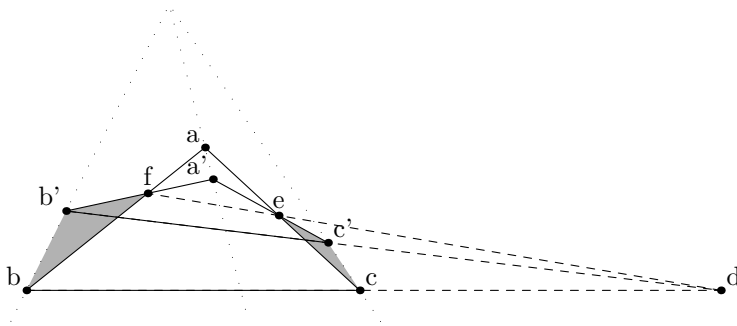
- z tw. Pappusa dla sześciokąta  $cbab'so$  (wpisanego w proste  $obb'$  i  $asc$ ) dostajemy, że  $d, u, t$  są współliniowe,
- z tw. Pappusa dla sześciokąta  $osab'a'c'$  (wpisanego w proste  $oaa'$  i  $b'c's$ ) dostajemy, że  $v, e, t$  są współliniowe,
- z tw. Pappusa dla sześciokąta  $autvb's$  (wpisanego w proste  $ab't$  i  $vus$ ) dostajemy, że  $f, d, e$  są współliniowe.

Udowodniliśmy więc naszą implikację.

Zauważmy, że implikacja (ii)  $\Rightarrow$  (i) jest dualna do implikacji (i)  $\Rightarrow$  (ii). Zatem z zasady dualności otrzymujemy, że (ii)  $\Rightarrow$  (i) zachodzi.

Drugą implikację możemy też udowodnić wprost, nie korzystając z zasady dualności. Tym razem zakładamy, że trójkąty  $abc$  i  $a'b'c'$  mają oś perspektywiczną (punkty  $d, e, f$  są współliniowe). Chcemy pokazać, że proste  $aa'$ ,  $bb'$  i  $cc'$  przecinają się w jednym punkcie. Przyjrzyjmy się trójkątom  $bb'f$  i  $cc'e$ . Mają one środek perspektywiczny (punkt  $d$ ), więc

z pierwszej części twierdzenia mają też oś perspektywiczną. Zatem punkty  $a, a'$  oraz  $bb' \cap cc'$  są współliniowe i trójkąty  $abc, a'b'c'$  mają środek perspektywiczny.



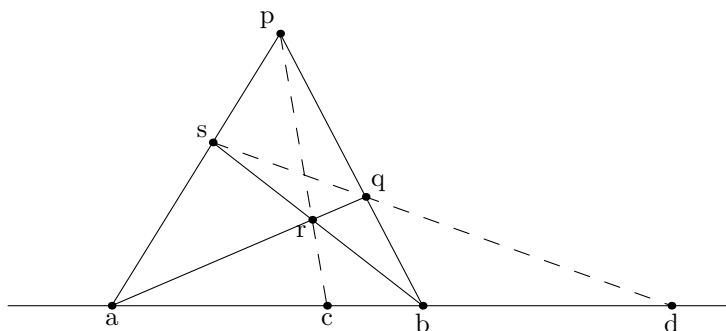
■

### 2.3.3. Czwórka harmoniczna

Na płaszczyźnie rzutowej definiujemy czwórkę harmoniczną w następujący sposób:

**Definicja 2.1** *Mówimy, że punkty  $a, b, c, d$  leżące na jednej prostej tworzą czwórkę harmoniczną, jeżeli istnieje czworokąt  $pqrs$ , którego jedna para przeciwległych boków przecina się w punkcie  $a$ , druga para przecina się w  $b$ , a pozostałe dwa boki przecinają prostą  $ab$  w punktach  $c$  i  $d$ .*

*Mówimy wtedy, że czworokąt  $pqrs$  realizuje czwórkę harmoniczną  $abcd$ .*



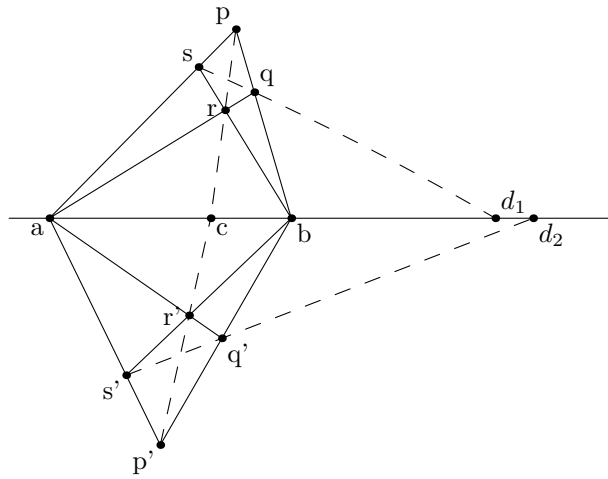
Napis  $H(ab, cd)$  oznacza, że punkty  $a, b, c, d$  (w tej kolejności) tworzą czwórkę harmoniczną. Zauważmy, że jeżeli zachodzi  $H(ab, cd)$ , to zachodzi również:  $H(ba, cd)$ ,  $H(ab, dc)$  oraz  $H(ba, dc)$ .

Pokażemy, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.2** *Niech  $a, b, c$  będą trzema różnymi punktami współliniowymi. Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt  $d$  taki, że zachodzi  $H(ab, cd)$ . Ponadto  $c \neq d$ .*

**Dowód:** Najpierw wykażemy istnienie punktu  $d$ , dla którego zachodzi  $H(ab, cd)$ . W tym celu skonstruujemy odpowiedni czworokąt  $pqrs$ . Niech  $p$  będzie dowolnym punktem leżącym poza prostą  $ab$ . Weźmy dowolny punkt  $r$  leżący na prostej  $pc$  (różny od  $p$  i  $c$ ). Niech  $q = ar \cap pb$  oraz  $s = br \cap pa$ . Wtedy czworokąt  $pqrs$  realizuje czwórkę harmoniczną  $abcd$ , gdzie  $d = ab \cap sq$ . Wykazaliśmy więc istnienie.

Aby udowodnić jednoznaczność, posłużymy się dowodem nie wprost: założmy, że są dwa punkty  $d_1$  i  $d_2$  spełniające założenia. Niech  $pqrs$  oraz  $p'q'r's'$  będą czworokątami realizującymi odpowiednio czwórki  $(a, b, c, d_1)$  oraz  $(a, b, c, d_2)$ .



Korzystamy z twierdzenia Desarguesa. Trójkąty  $psr$  oraz  $p's'r'$  mają oś perspektywiczną (tą osią jest prosta  $ab$ ), więc mają też środek perspektywiczny. Zatem proste  $pp'$ ,  $ss'$  oraz  $rr'$  przecinają się w jednym punkcie. Podobna sytuacja zachodzi dla trójkątów  $pqr$  oraz  $p'q'r'$ . W rezultacie dostajemy, że proste  $pp'$ ,  $qq'$ ,  $rr'$  i  $ss'$  przecinają się w jednym punkcie. Stąd trójkąty  $pqs$  oraz  $p'q's'$  mają środek perspektywiczny. Z twierdzenia Desarguesa mają też oś perspektywiczną (którą jest prosta  $ab$ ). Zatem proste  $sq$  oraz  $s'q'$  przecinają się na prostej  $ab$ , czyli  $d_1 = d_2$ .

Fakt, że  $c \neq d$ , jest prostą konsekwencją aksjomatu Fano dla czworokąta  $pqrs$ . ■

## 2.4. Przekształcenia płaszczyzny rzutowej

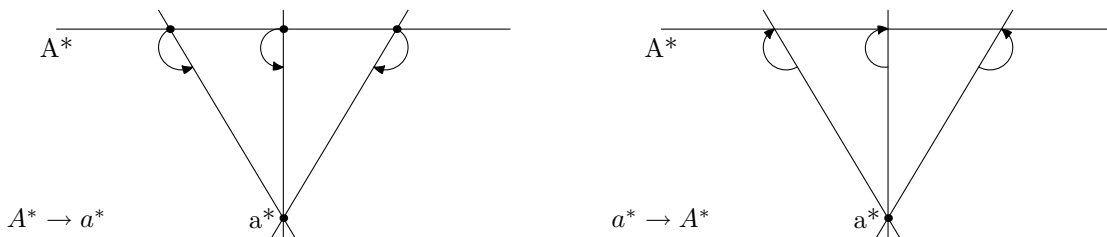
Teraz zajmiemy się przekształceniami naszej płaszczyzny. Na początku zdefiniujemy przekształcenia jednowymiarowe (dla łańcucha punktów / pęku prostych), a następnie rozszerzymy je do przekształceń dwuwymiarowych.

### 2.4.1. Rzuty i przekształcenia rzutowe

Wprowadzimy następujące oznaczenia:  $A^*$  — łańcuch punktów incydentnych z prostą  $A$ ,  $a^*$  — pęk prostych incydentnych z punktem  $a$ .

**Definicja 2.2** Niech  $A$  będzie dowolną prostą oraz  $a$  — punktem, dla którego zachodzi  $a \not\perp A$ . Przekształcenie, które każdemu punktowi łańcucha  $A^*$  przyporządkowuje prostą z pęku  $a^*$  przechodzącą przez ten punkt nazywamy rzutem.

Rzutem nazywamy również przekształcenie odwrotne do powyższego, czyli takie, które każdej prostej z pęku  $a^*$  przyporządkowuje punkt przecięcia tej prostej z prostą  $A$ .



Z aksjomatów 2.1, 2.2 i 2.3 wiemy, że rzut jest dobrze określony dla dowolnego łańcucha  $A^*$  i pęku  $a^*$  takich, że  $a \nmid A$ .

**Definicja 2.3** *Przekształceniem rzutowym nazywamy złożenie dowolnej liczby rzutów.*

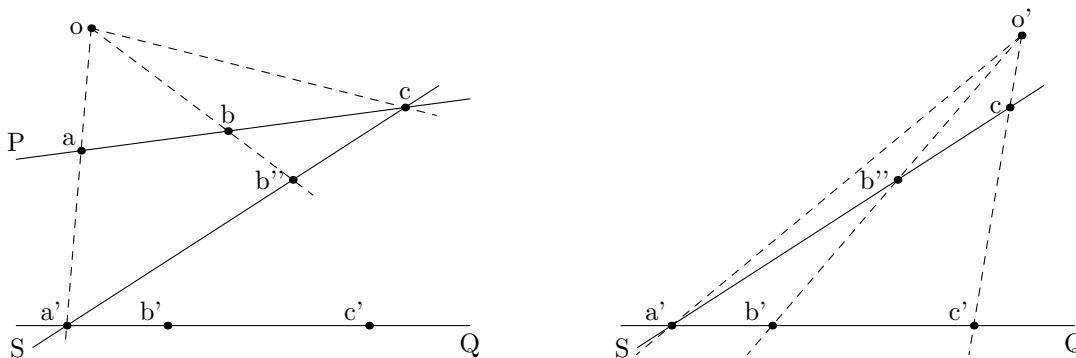
**Definicja 2.4** *Przekształcenie rzutowe nazywamy perspektywicznym, jeżeli można je otrzymać jako złożenie dwóch rzutów.*

W każdym przekształceniu perspektywicznym łańcucha  $A^*$  w łańcuch  $B^*$  proste łączące punkty  $A^*$  z ich obrazami przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywamy *środkiem perspektywicznym*. W przekształceniu perspektywicznym pęku  $a^*$  w pęk  $b^*$  punkty przecięcia prostych z  $a^*$  z ich obrazami są współliniowe.

**Twierdzenie 2.3** *Niech  $P, Q$  będą dowolnymi prostymi. Weźmy dowolne punkty  $a, b, c$  (parami różne) leżące na prostej  $P$  oraz dowolne punkty  $a', b', c'$  (też parami różne) leżące na prostej  $Q$ . Istnieje przekształcenie rzutowe, które przekształca  $a$  na  $a'$ ,  $b$  na  $b'$  oraz  $c$  na  $c'$ .*

**Dowód:** Pokażemy konstrukcję takiego przekształcenia. Możemy założyć, że żaden z punktów  $a, b, c$  nie leży na prostej  $Q$ . (Jeżeli tak nie jest, możemy wykonać odpowiednie przekształcenie perspektywiczne i nasz warunek będzie już spełniony).

Teraz nasze przekształcenie będzie złożeniem dwóch przekształceń perspektywicznych. W pierwszym kroku przekształcimy punkt  $a$  na  $a'$ . Niech  $S$  będzie prostą przechodzącą przez  $a'$  oraz  $c$ . Wykonamy przekształcenie perspektywiczne pęku  $P^*$  na pęk  $S^*$ . Środek  $o$  tego przekształcenia może leżeć w dowolnym miejscu na prostej  $aa'$  (poza  $a$  i  $a'$ ). Przekształcenie to przeprowadzi  $a$  na  $a'$ ,  $b$  na pewien punkt  $b''$ , a  $c$  zostanie na miejscu.



W drugim kroku wykonamy przekształcenie z łańcucha  $S^*$  na łańcuch  $Q^*$ , które przeprowadza  $b''$  na  $b'$  oraz  $c$  na  $c'$ . Własność tę ma przekształcenie perspektywiczne o środku w punkcie  $b''b' \cap cc'$ . W tym przekształceniu obrazem punktu  $a'$  jest  $a'$ .

Złożenie dwóch powyższych przekształceń przeprowadza  $a$  na  $a'$ ,  $b$  na  $b'$  oraz  $c$  na  $c'$ . ■

Okazuje się, że podanie wartości dla trzech punktów jednoznacznie wyznacza całe przekształcenie. Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.4 (podstawowe twierdzenie geometrii rzutowej)** *Przekształcenie rzutowe jest jednoznacznie wyznaczone przez podanie wartości na trzech punktach.*

**Wniosek 2.1** *Przekształcenie rzutowe  $A^* \rightarrow A^*$  (lub  $a^* \rightarrow a^*$ ), które ma trzy punkty stałe, jest identycznością.*

**Wniosek 2.2** Przekształcenie rzutowe  $A^* \rightarrow B^*$  jest perspektywiczne wtw. gdy punkt wspólny łańcuchów  $A^*$  i  $B^*$  jest punktem stałym tego przekształcenia.

**Ćwiczenie 2.1** Weźmy łańcuchy punktów  $A^*$  i  $B^*$  ( $A^* \neq B^*$ ), gdzie punkty łańcucha  $B^*$  są obrazami punktów  $A^*$  przy pewnym przekształceniu rzutowym  $\phi$ . Wykazać, że istnieje łańcuch punktów  $C^*$ , który jest perspektywiczny jednocześnie do  $A^*$  i  $B^*$  (czyli jego punkty są obrazami punktów z  $A^*$  i  $B^*$  przy pewnych przekształceniach perspektywicznych).

**Ćwiczenie 2.2** Mamy dane proste  $A, B$ . Na prostej  $A$  zaznaczone są punkty  $a_1, a_2, a_3$  oraz  $x$ . Na prostej  $B$  zaznaczone są punkty  $\lambda(a_1), \lambda(a_2)$  i  $\lambda(a_3)$  dla pewnego przekształcenia rzutowego  $\lambda : A^* \rightarrow B^*$ . Znaleźć punkt  $\lambda(x)$ .

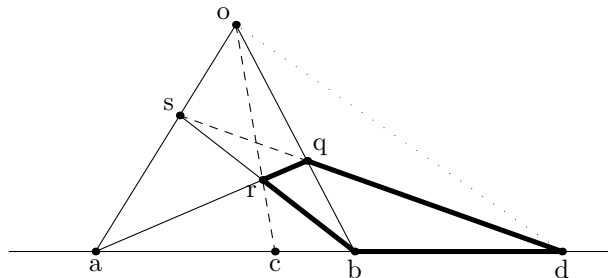
Chcielibyśmy mieć jakiś niezmiennik przekształceń rzutowych. Z twierdzenia 2.4 wiemy, że każdą trójkę punktów możemy przekształcić na dowolną inną trójkę, więc niezmiennik musi dotyczyć co najmniej czterech punktów. Niezmiennikiem będzie własność tworzenia czwórki harmoniczej:

**Twierdzenie 2.5** Jeżeli w pewnym przekształceniu rzutowym punkty  $a, b, c, d$  przechodzą odpowiednio na punkty  $a', b', c', d'$  oraz zachodzi  $H(ab, cd)$ , to zachodzi również  $H(a'b', c'd')$ .

**Dowód:** Wprowadzimy najpierw definicję dualną do definicji harmoniczej czwórki punktów.

Niech  $A, B, C, D$  będą prostymi współpękowymi. Powiemy, że proste te tworzą harmoniczną czwórkę prostych (fakt ten oznaczamy napisem  $H(AB, CD)$ ), jeśli istnieje czworobok, którego jedna para przeciwległych wierzchołków leży na prostej  $A$ , druga para na prostej  $B$ , a pozostałe dwa wierzchołki na prostych  $C$  i  $D$ .

Niech  $a, b, c, d$  będą punktami współliniowymi, dla których zachodzi  $H(ab, cd)$ . Niech  $o$  będzie dowolnym punktem leżącym poza prostą  $ab$ . Pokażemy, że proste  $A = ao, B = bo, C = co, D = do$  tworzą harmoniczną czwórkę prostych. Potrafimy skonstruować czworokąt  $oqrs$ , który realizuje czwórkę  $abcd$ . Wtedy czworobok  $bd, dq, qr, rb$  realizuje czwórkę  $ABCD$ .



Pokażemy też, że obrazem (przy rzucie) harmoniczej czwórki prostych  $A, B, C, D$  z pęku  $o^*$  jest harmoniczna czwórka punktów  $a, b, c, d$ . Będziemy chcieli pokazać czworokąt realizujący czwórkę  $abcd$ . Niech  $s$  będzie dowolnym punktem na prostej  $oa$ ,  $r = bs \cap oc$ ,  $q = ar \cap ob$ ,  $d' = sq \cap ad$ . Czworobok  $bd', d'q, qr, rb$  realizuje czwórkę  $A, B, C, od'$ . Ponieważ czwarta prosta harmoniczna jest jedyna (dowód dualny do dowodu w przypadku harmoniczej czwórki punktów) oraz zachodzi  $H(AB, CD)$ , więc  $d = d'$ . Zatem zachodzi sytuacja jak na powyższym rysunku i czworokąt  $oqrs$  realizuje czwórkę  $abcd$ .

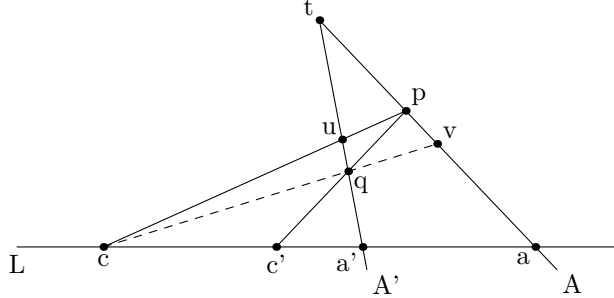
Pokazaliśmy, że rzutem harmoniczej czwórki punktów jest harmoniczna czwórka prostych i odwrotnie. Zatem przekształcenia rzutowe zachowują czwórki harmoniczne. ■

Na zakończenie tego podrozdziału udowodnimy jeszcze jedno twierdzenie:



**Twierdzenie 2.6** Niech  $L$  będzie dowolną prostą. Przekształcenie rzutowe  $\lambda : L^* \rightarrow L^*$ , które zamienia pewną parę punktów (czyli  $\exists_{a \neq a'} \lambda(a) = a', \lambda(a') = a$ ), jest inwolucją.

**Dowód:** Weźmy dowolny punkt  $t$  leżący poza prostą  $L$  oraz dowolny punkt  $p$  na prostej  $at$ . Niech  $c$  będzie dowolnym punktem na prostej  $L$  (różnym od  $a$  i  $a'$ ) oraz  $c' = \lambda(c)$ . Pokażemy, że wówczas  $\lambda(c') = c$ .



Oznaczmy  $A = at$ ,  $A' = a't$ ,  $u = A' \cap cp$ ,  $q = A' \cap c'p$  oraz  $v = A \cap cq$ . Wprowadźmy przekształcenie  $\lambda'$ , które jest złożeniem następujących przekształceń rzutowych:

- przekształcenie perspektywiczne z  $L^*$  na  $A^*$  o środku  $q$ ,
- przekształcenie perspektywiczne z  $A^*$  na  $A'^*$  o środku  $c$ ,
- przekształcenie perspektywiczne z  $A'^*$  na  $L^*$  o środku  $p$ .

Łatwo zauważyć, że  $\lambda'(a) = a'$ ,  $\lambda'(a') = a$ ,  $\lambda'(c) = c'$  oraz  $\lambda'(c') = c$ . Przekształcenia  $\lambda$  i  $\lambda'$  są rzutowe i pokrywają się na trzech punktach, więc z twierdzenia 2.4  $\lambda = \lambda'$ . Zatem  $\lambda(c') = c$ . Z dowolności  $c$  dostajemy, że  $\lambda$  jest inwolucją. ■

#### 2.4.2. Kolineacje i korelacje rzutowe

**Definicja 2.5** Kolineacją nazywamy dowolne przekształcenie płaszczyzny rzutowej w płaszczyznę rzutową, które przekształca punkty na punkty i proste na proste oraz zachowuje relację incydencji.

**Definicja 2.6** Korelacją nazywamy dowolne przekształcenie płaszczyzny rzutowej w płaszczyznę rzutową, które przekształca punkty na proste i proste na punkty oraz zachowuje relację incydencji.

**Definicja 2.7** Kolineację / korelację nazywamy rzutową, jeśli jej obcięcie do każdego łańcucha oraz pęku jest przekształceniem rzutowym.

**Twierdzenie 2.7** Kolineacja / korelacja jest rzutowa, jeśli jej obcięcie do pewnego łańcucha / pęku jest przekształceniem rzutowym.

**Dowód:** Przedstawimy dowód dla przypadku kolineacji, której obcięcie do pewnego łańcucha  $A^*$  jest przekształceniem rzutowym. Dowody dla pozostałych przypadków przebiegają analogicznie.

Oznaczmy naszą kolineację symbolem  $\phi$ . Chcemy pokazać, że dla dowolnego łańcucha  $B^*$  przekształcenie  $\phi|_{B^*}$  jest rzutowe. Niech  $o$  będzie dowolnym punktem leżącym poza  $A^*$  i  $B^*$ . Przekształcenie perspektywiczne  $\psi$  o środku  $o$  przekształca łańcuch  $B^*$  na  $A^*$ . Weźmy dowolny punkt  $x \in B^*$ . Wtedy  $x, o, \psi(x)$  są współliniowe, czyli  $\phi(x), \phi(o), \phi(\psi(x))$  są współliniowe. Zatem  $\phi(x)$  jest obrazem  $\phi(\psi(x))$  w przekształceniu perspektywicznym o środku  $\phi(o)$ . Przekształcenie  $\phi|_{B^*}$  jest więc rzutowe jako złożenie przekształceń rzutowych.

Podobnie będzie, jeśli zamiast łańcucha  $B^*$  będziemy rozpatrywać pęk  $b^*$ . Możemy się ograniczyć tylko do pęków, których środek nie leży na  $A$  (z faktu, że  $\phi|_{A^*}$  jest rzutowe dostaliśmy już, że obcięcie  $\phi$  do dowolnego łańcucha jest rzutowe, więc w miejsce  $A^*$  możemy wybrać dowolny łańcuch nie przechodzący przez środek pęku). Wtedy  $\phi|_{b^*}$  jest złożeniem rzutu z pęku  $b^*$  na  $A^*$ , przekształcenia rzutowego  $\phi|_{A^*}$  oraz rzutu z łańcucha  $\phi(A)^*$  na pęk  $\phi(b)^*$ . Jest to więc przekształcenie rzutowe, jako złożenie przekształceń rzutowych. ■

**Wniosek 2.3** *Każda kolineacja, która ma prostą punktów stałych, jest rzutowa.*

W dalszej części pracy będziemy rozważać wyłącznie kolineacje i korelacje rzutowe. Napis „kolineacja” lub „korelacja” będzie oznaczał kolineację lub korelację rzutową.

**Twierdzenie 2.8** *Kolineacja / korelacja jest jednoznacznie wyznaczona przez podanie wartości na czterech punktach, spośród których żadne trzy nie są współliniowe.*

Nie będziemy tutaj pokazywać konstrukcji. Pokażemy jednak, że kolineacja, która nie rusza wierzchołków pewnego czworokąta, jest identycznością. Niech  $a, b, c, d$  — odpowiednie wierzchołki. Wtedy proste  $ab$  oraz  $cd$  są prostymi stałymi. Zatem punkt  $ab \cap cd$  jest punktem stałym. W takim razie proste  $ab$  i  $cd$  mają po trzy punkty stałe, więc są prostymi punktów stałych. Każda prosta, która nie przechodzi przez punkt  $ab \cap cd$ , ma dwa punkty stałe, więc jest prostą stałą. Każdy punkt leży na przecięciu dwóch prostych stałych, więc jest stały.

Niech teraz  $\phi$  i  $\psi$  będą kolineacjami, które pokrywają się na czterech punktach. Wtedy kolineacja  $\phi^{-1}\psi$  ma cztery punkty stałe, więc jest identycznością i  $\phi = \psi$ .

**Ćwiczenie 2.3** *Udowodnić, że prawdziwe jest następujące stwierdzenie: kolineacja ma prostą punktów stałych wtw. gdy ma pęk prostych stałych (w szczególnym przypadku środek pęku może leżeć na tej prostej).*

**Definicja 2.8** *Kolineację, która zachowuje wszystkie proste przechodzące przez pewien punkt  $o$  oraz wszystkie punkty leżące na prostej  $O$ , nazywamy kolineacją perspektywiczną o środku  $o$  i osi  $O$ .*

**Ćwiczenie 2.4** *Udowodnić, że każda kolineacja, która jest involucją (czyli podniesiona do kwadratu daje identyczność), jest perspektywiczna.*

Pokażemy teraz kilka przykładów kolineacji w naszym podstawowym modelu, czyli na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  z dołączoną prostą niewłaściwą:

- przesunięcie o wektor,
- obrót wokół punktu  $(0, 0)$ ,
- jednokładność o środku  $(0, 0)$ ,
- homologia harmoniczna: mamy wyróżniony punkt stały  $o$  oraz prostą punktów stałych  $O$  ( $o \notin O$ ). Weźmy dowolny punkt  $x$ . Leży on na pewnej prostej  $oa$  dla  $a \in O$ . Obrazem takiego punktu  $x$  jest czwarty punkt harmoniczny do  $o, a, x$ .

**Ćwiczenie 2.5** *Wykazać, że powyższe przykłady przekształceń są kolineacjami i są rzutowe. Stwierdzić, czy mają one prostą punktów stałych / pęk prostych stałych.*

## Rozdział 3

# Stożkowe w geometrii rzutowej

### 3.1. Korelacja biegunowa i punkty samosprężone

W tym rozdziale wszystkie przekształcenia, którymi się będziemy zajmować, to korelacje biegunowe.

**Definicja 3.1** *Korelacja biegunowa jest to korelacja rzutowa, której kwadrat jest identycznością.*

Korelacja biegunowa  $\psi$  przekształca dowolny punkt  $a$  na prostą  $\psi(a)$ , natomiast prostą  $\psi(a)$  odwzorowuje z powrotem na punkt  $a$ . Prostą  $\psi(a)$  nazywamy *biegunową* punktu  $a$ . Punkt  $a$  nazywamy *biegunem* prostej  $\psi(a)$ .

Biegunowe wszystkich punktów leżących na prostej  $A$  są współpękowe (środkiem pęku jest biegun prostej  $A$ ).

**Ćwiczenie 3.1** *Wykazać, że dla korelacji biegunowej  $\psi$  zachodzi:  $a \mid \psi(b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $b \mid \psi(a)$ .*

**Definicja 3.2** *Niech  $\psi$  będzie korelacją biegunową. Mówimy, że punkty  $a$  i  $b$  są sprężone w tej korelacji, jeżeli  $a \mid \psi(b)$ .*

W dalszej części tego rozdziału będziemy mówić po prostu o punktach sprężonych, bez zaznaczania za każdym razem, że są to punkty sprężone w pewnej korelacji biegunowej  $\psi$ .

**Definicja 3.3** *Punkt  $a$  jest samosprężony, jeżeli  $a \mid \psi(a)$ . Prosta  $A$  jest samosprężona, jeżeli  $A \mid \psi(A)$ .*

**Twierdzenie 3.1** *Prosta samosprężona ma dokładnie jeden punkt samosprężony.*

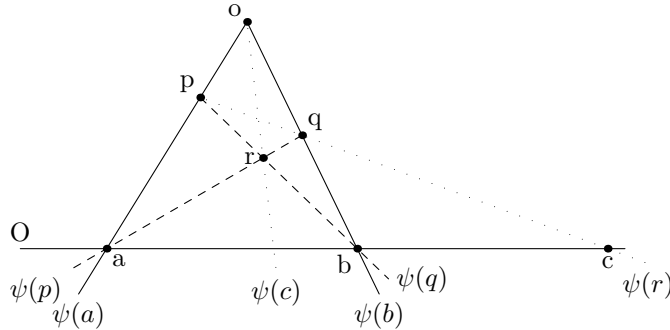
**Dowód:** Niech  $\psi$  będzie korelacją biegunową oraz  $A$  — prostą samosprężoną. Oczywiście  $\psi(A) \mid A$ . Załóżmy, że jest jeszcze inny punkt samosprężony  $b \mid A$ . Wtedy  $\psi(b) \mid \psi(A)$ , ponieważ korelacja zachowuje relację incydencji. Z definicji punktu samosprężonego dostajemy, że  $\psi(b) \mid b$ . Prosta  $\psi(b)$  przechodzi przez punkty  $\psi(A)$  oraz  $b$ , tak samo jak prosta  $A$ . Sprzeczność z aksjomatem 2.1. ■

**Twierdzenie 3.2** *Prosta może mieć co najwyżej dwa punkty samosprężone.*

**Dowód:** Najpierw pokażemy, że na prostej, która ma trzy punkty samosprężone, każdy punkt jest samosprężony. Następnie udowodnimy, że na każdej prostej jest punkt, który nie jest samosprężony. Stąd otrzymamy tezę.

Załóżmy, że na prostej  $O$  są trzy punkty samosprężone  $a, b, c$ . Z twierdzenia 3.1 dostajemy, że  $o = \psi(O) \uparrow O$ . Zatem  $\psi(a) \mid ao$ ,  $\psi(b) \mid bo$ ,  $\psi(c) \mid co$ . Korelacja obcięta do łańcucha  $O^*$  jest rzutem na pęk  $o^*$  (korelacja ta jest wyznaczona jednoznacznie przez wartości dla punktów  $a, b, c$ ). W ten sposób pokazaliśmy, że każdy punkt prostej  $O$  jest samosprężony.

Załóżmy, że wszystkie punkty na prostej  $O$  są samosprężone. Wtedy  $o = \psi(O) \uparrow O$ . Weźmy dowolne punkty  $a, b$  leżące na prostej  $O$ , samosprężone. Dostajemy, że  $\psi(a) \mid ao$ ,  $\psi(b) \mid bo$ . Weźmy dowolny punkt  $p$  na prostej  $\psi(a)$ . Wtedy  $\psi(p) \mid a$ .



Niech  $q = \psi(p) \cap \psi(b)$ . Otrzymujemy, że  $bp \mid \psi(q)$ . Teraz niech  $r = \psi(p) \cap \psi(q)$ . Wtedy  $pq \mid \psi(r)$ . Oznaczmy jeszcze punkt  $c = \psi(r) \cap O$ . Wtedy  $or \mid \psi(c)$ . Z aksjomatu 2.5 wiemy, że przekątne czworokąta  $oprq$  nie mogą przecinać się na jednej prostej, zatem  $c \uparrow \psi(c)$  — sprzeczność. Na prostej  $O$  leży punkt, który nie jest samosprężony. ■

**Twierdzenie 3.3** *Prosta, która nie jest samosprężona i ma jeden punkt samosprężony, ma też drugi punkt samosprężony.*

**Dowód:** Niech  $O$  będzie taką prostą oraz  $a \mid O$  — punktem samosprężonym. Zdefiniujmy przekształcenie  $\phi : O^* \rightarrow O^*$ , które każdemu punktowi prostej  $O$  przyporządkowuje punkt z nim sprzężony. Można łatwo pokazać, że takie przekształcenie jest dobrze określone oraz że jest involucją. Niech  $c$  i  $d$  będą punktami, które są zamieniane ze sobą w tej involucji. Weźmy punkt  $b$ , dla którego zachodzi  $H(cd, ab)$ . Teraz z twierdzenia 2.5 dostajemy, że zachodzi  $H(dc, a\phi(b))$ , czyli  $\phi(b) = b$  i punkt  $b$  jest samosprężony. ■

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy, że jeżeli na płaszczyźnie rzutowej jest jeden punkt samosprężony, to jest również dużo innych punktów samosprężonych. Niech na przykład punkt  $a$  będzie samosprężony. Wtedy na każdej prostej przechodzącej przez  $a$  i różnej od  $\psi(a)$  leży jeszcze jeden punkt samosprężony.

Jeżeli przez każdy punkt przechodzi nieskończenie wiele prostych (tak jak w naszych przykładowych modelach) to otrzymujemy, że jeśli istnieje jeden punkt samosprężony, to istnieje ich nieskończenie wiele.

Pokażemy teraz, w jaki sposób korelacja biegunowa generuje przekształcenie rzutowe między dowolną parą prostych, które nie są sprzężone.

**Twierdzenie 3.4** *Niech  $A, B$  będą dowolnymi prostymi, które nie są sprzężone (być może  $A = B$ ). Wtedy przekształcenie, które każdemu punktowi prostej  $A$  przyporządkowuje sprzężony z nim punkt prostej  $B$ , jest przekształceniem rzutowym. Ponadto, jeżeli  $A \neq B$  oraz punkt  $A \cap B$  jest samosprężony, przekształcenie to jest perspektywiczne.*

**Dowód:** Niech punkt  $a$  będzie biegunem prostej  $A$ . Wtedy szukane przekształcenie jest złożeniem przekształcenia rzutowego  $\psi|_{A^*} : A^* \rightarrow a^*$  oraz rzutu z  $a^*$  na  $B^*$ . Jest więc przekształceniem rzutowym. Druga część twierdzenia wynika bezpośrednio z wniosku 2.2. ■

Czasem, mając daną korelację rzutową, będziemy chcieli wykazać, że jest ona biegunowa. Za chwilę udowodnimy twierdzenie, które nam to zadanie ułatwi.

**Definicja 3.4** *Trójkąt jest samobiegunowy w korelacji rzutowej  $\phi$ , jeżeli obrazem każdego wierzchołka tego trójkąta jest prosta zawierająca jego przeciwległy bok.*

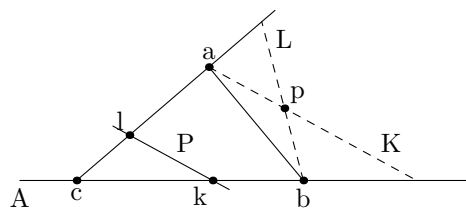
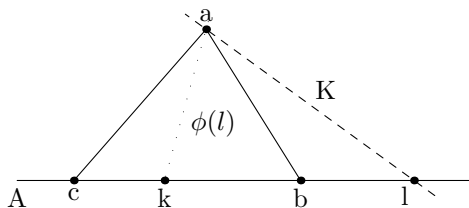
**Twierdzenie 3.5** *Korelacja rzutowa  $\phi$  jest biegunowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje trójkąt samobiegunowy w tej korelacji.*

**Dowód:** Pokażemy, że zachodzą implikacje w obie strony.

( $\Rightarrow$ ) Weźmy dowolne punkty  $a$  i  $b$ , które są sprzężone, ale żaden z nich nie jest samosprzężony. Wtedy dla  $c = \phi(a) \cap \phi(b)$  trójkąt  $abc$  jest samobiegunowy.

( $\Leftarrow$ ) Niech  $abc$  będzie trójkątem samobiegunowym w korelacji rzutowej  $\phi$ . Ponadto, niech  $A = \phi(a), B = \phi(b), C = \phi(c)$  będą bokami tego trójkąta. Zauważmy najpierw, że obrazami prostych  $A, B, C$  są odpowiednio punkty  $a, b, c$  ( $A|bc$ , więc  $\phi(A)|BC$ ,  $\phi(A) = a$ ; dla pozostałych boków analogicznie).

Teraz pokażemy, że każdy punkt leżący na boku trójkąta  $abc$  jest rzędu co najwyżej 2 (czyli jest punktem stałym przekształcenia  $\phi^2$ ). Niech  $k$  będzie dowolnym punktem na prostej  $A$  oraz  $K = \phi(k)$ . Oznaczmy  $l = K \cap A$ . Przekształcenie  $\lambda : A^* \rightarrow A^*$ , które każdemu elementowi  $x$  przyporządkowuje element  $y$  taki, że  $y|\phi(x)$ , jest przekształceniem rzutowym (dowód jak w tw. 3.4). Ponadto  $\lambda(b) = c$  oraz  $\lambda(c) = b$ . Z twierdzenia 2.6 dostajemy, że  $\lambda$  jest inwolucją.  $\lambda(k) = l$ , więc  $\lambda(l) = k$  i  $k|\phi(l)$ . Ponieważ  $l|A$ , więc  $\phi(l) = ak$ . Na koniec dostajemy:  $al|K$ , czyli  $\phi(K)|A\phi(l)$ ,  $\phi(K) = k$ .



Musimy jeszcze pokazać, że punkty nie leżące na bokach też są rzędu co najwyżej 2. Weźmy dowolny punkt  $p$  leżący poza  $A, B, C$  oraz prostą  $P = \phi(p)$ . Chcemy pokazać, że  $\phi(P) = p$ . Niech  $K = ap, L = bp, k = \phi(K), l = \phi(L)$ . Ponieważ  $p|KL$ , więc  $P|kl$ . Zatem  $\phi(P)|\phi(k)\phi(l) = KL$ ,  $\phi(P) = p$ . ■

## 3.2. Stożkowe i ich podstawowe własności

**Definicja 3.5** *Stożkową nazywamy zbiór punktów i prostych samosprzężonych korelacji biegunowej.*

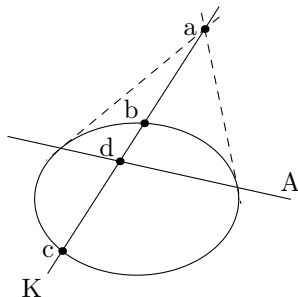
Uwaga: może się zdarzyć, że w danej korelacji biegunowej nie ma punktów samosprzężonych, czyli stożkowa jest pusta. W dalszej części pracy będziemy rozważać wyłącznie przypadki, gdy stożkowa jest niepusta.

**Definicja 3.6** Prosta  $A$ , która ma tylko jeden punkt samosprężony  $a$ , nazywamy styczną do stożkowej. Punkt  $a$  nazywamy wtedy punktem styczności.

Proste, które mają dwa punkty samosprężone, nazywamy *siecznymi*, natomiast te, które nie mają żadnych punktów samosprężonych — *zewnątrznymi*. Podobnie, punkty nazywamy *zewnątrznymi* lub *wewnątrznymi*, w zależności od tego, czy incydują z dwoma czy z żadną prostą samosprężoną.

Przedstawimy teraz proste własności bieguna i biegunowej:

- Jeśli prosta incyduje z dwoma punktami samosprężonymi  $a$  i  $b$ , to jej biegun jest punktem przecięcia prostych samosprężonych  $\psi(a)$  i  $\psi(b)$ .
- Jeśli prosta nie incyduje z żadnym punktem samosprężonym, to jej biegun nie leży na żadnej prostej samosprężonej.
- Niech  $a$  będzie punktem nie należącym do stożkowej oraz  $A$  — biegunową tego punktu. Weźmy dowolną prostą  $K$  incydentną z  $a$  i przecinającą stożkową w punktach  $b$  i  $c$ . Niech  $d$  będzie punktem przecięcia biegunowej z tą prostą. Wtedy zachodzi  $H(ad, bc)$ .



Własność ta wymaga uzasadnienia: możemy utworzyć przekształcenie, które każdemu elementowi prostej  $K$  przyporządkowuje punkt z nim sprzężony, również leżący na prostej  $K$ . To przekształcenie jest involucją o punktach stałych  $b$  i  $c$ . Załóżmy, że zachodzi  $H(ad, bc')$  dla pewnego punktu  $c'$ . Przekształcenie rzutowe zachowuje czwórkę harmoniczną, zachodzi więc  $H(da, b\psi(c'))$ . Dostajemy, że  $c'$  jest punktem stałym involucji, czyli  $c' = c$ .

- Niech  $a$  będzie punktem nie należącym do stożkowej oraz  $A$  — biegunową tego punktu. Homologia harmoniczna o środku  $a$  i osi  $A$  przekształca stożkową na nią samą. Jest to prosta konsekwencja poprzedniej własności.

**Twierdzenie 3.6** Stożkowa wyznacza jednoznacznie swoją korelację.

**Dowód:** Pokażemy, że dla każdego punktu płaszczyzny rzutowej jesteśmy w stanie znaleźć jego obraz w korelacji generowanej przez stożkową. Jeśli dany punkt należy do stożkowej, to jego obrazem jest styczna przechodząca przez ten punkt. Jeśli punkt jest punktem zewnętrznym, to incyduje z dwiema prostymi samosprężonymi  $N$  i  $M$ . Wtedy jego biegunową jest prosta  $\psi(N)\psi(M)$ .

Podobnie, jeśli mamy daną sieczną  $K$  stożkowej, możemy łatwo znaleźć jej biegun — wystarczy wziąć styczne do stożkowej w punktach, w których  $K$  przecina stożkową, a następnie znaleźć punkt przecięcia tych stycznych.

Pokażemy teraz, jak znaleźć biegunową dla punktu wewnętrznego. Taki punkt jest incydentny z pewnymi stycznymi  $N$  i  $M$  (wystarczy wziąć dowolne proste łączące nasz punkt z jakimiś punktami stożkowej). Wystarczy teraz znaleźć bieguny tych prostych, a następnie prostą incydentną z tymi biegunami. ■

**Ćwiczenie 3.2** *Jak wygląda w modelu  $\mathbb{R}^2$  z prostą niewłaściwą korelacja, która jest generowana przez okrąg o środku w punkcie  $(0,0)$  i promieniu 1? Gdzie znajdują się biegunowe punktów niewłaściwych i biegun prostej niewłaściwej?*

### 3.3. Twierdzenie Braikenridge’a - MacLaurina, czyli jak wyznaczyć stożkową

W tym podrozdziale będziemy chcieli odpowiedzieć na pytanie, jakie elementy na płaszczyźnie rzutowej wyznaczają jednoznacznie stożkową. W tym celu zajmiemy się najpierw przekształceniami rzutowymi, które nie są perspektywiczne.

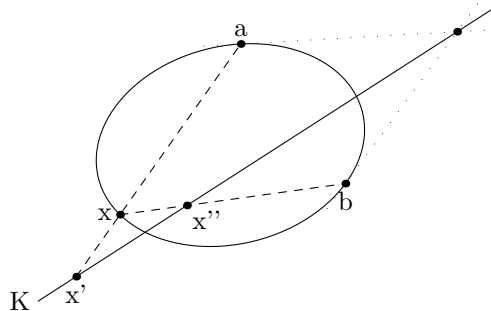
Przy omawianiu przekształceń rzutowych perspektywicznych zauważyliśmy, że przekształcenie rzutowe pęku  $a^*$  w pęk  $b^*$  jest perspektywiczne wtw. gdy punkty przecięcia prostych z  $a^*$  z ich obrazami są współliniowe. Nasuwa się pytanie — czy można w podobny sposób scharakteryzować przekształcenia rzutowe nieperspektywiczne? Okazuje się, że tak.

**Twierdzenie 3.7 (Steiner)** *Niech  $\lambda$  będzie bijekcją pęku  $a^*$  w pęk  $b^*$ . Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Punkty przecięcia prostych z pęku  $a^*$  z ich obrazami leżą na stożkowej przechodzącej przez punkty  $a$  i  $b$ ,*
- (ii)  *$\lambda$  jest przekształceniem rzutowym nieperspektywicznym.*

**Dowód:** Pokażemy, że zachodzą implikacje w obie strony.

(i  $\Rightarrow$  ii) Aby pokazać, że  $\lambda$  jest przekształceniem rzutowym, wystarczy je przedstawić jako złożenie przekształceń rzutowych. Oznaczmy przez  $\psi$  korelację biegunową generującą stożkową. Ustalmy  $K$  – dowolną prostą sprzężoną do prostej  $ab$  (czyli przechodzącą przez biegun prostej  $ab$ ). Niech  $x$  będzie dowolnym punktem na stożkowej,  $x' = ax \cap K$ ,  $x'' = bx \cap K$ .



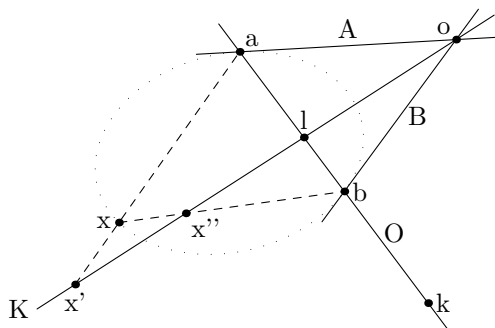
Pokażemy, że punkty  $x'$  oraz  $x''$  są sprzężone w korelacji  $\psi$ : Z tw. 3.4 przekształcenie, które każdemu punktowi prostej  $ax$  przyporządkowuje sprzężony z nim punkt prostej  $bx$  jest przekształceniem rzutowym perspektywicznym. Środkiem perspektywicznym musi być biegun prostej  $ab$  (wystarczy zauważyć, które punkty są sprzężone z punktami  $a$  i  $b$ ). Zatem punktowi  $x'$  odpowiada punkt  $x''$  i punkty te są sprzężone.

Teraz zauważmy, że  $\lambda$  jest złożeniem następujących przekształceń rzutowych: rzutu z pęku  $a^*$  na łańcuch  $K^*$ ; przekształcenia, które każdemu elementowi łańcucha  $K^*$  przyporządkowuje sprzężony z nim element  $K^*$ ; rzutu z łańcucha  $K^*$  na pęk  $b^*$ .

Przekształcenie  $\lambda$  jest rzutowe. Jest również nieperspektywiczne, ponieważ punkty przecięcia prostych z  $a^*$  z ich obrazami nie są współliniowe.

(ii  $\Rightarrow$  i)  $\lambda : a^* \rightarrow b^*$  jest przekształceniem rzutowym nieperspektywnym. Chcemy pokazać, że punkty przecięcia prostych z  $a^*$  z ich obrazami leżą na jednej stożkowej. W tym celu znajdziemy korelację biegunową  $\psi$  i pokażemy, że wyznaczana przez nią stożkowa spełnia nasze warunki.

Oznaczmy przez  $O$  prostą  $ab$ . Niech  $A, B$  będą prostymi, dla których zachodzi:  $\lambda(A) = O$ ,  $\lambda(O) = B$ . Przekształcenie  $\lambda$  jest nieperspektywiczne, więc  $A, B \neq O$ . Niech  $o = A \cap B$ . Jeśli przekształcenie  $\lambda$  wyznacza stożkową, to dla odpowiadającej tej stożkowej korelacji  $\psi$  musi zachodzić:  $\psi(o) = O$ ,  $\psi(a) = A$ ,  $\psi(b) = B$ . Aby korelacja była wyznaczona jednoznacznie, potrzebujemy jeszcze jednego punktu.



Niech  $x$  będzie dowolnym punktem przecięcia prostej z pęku  $a^*$  (różnej od prostych  $A$  i  $O$ ) z odpowiadającą jej prostą z  $b^*$ . Ustalmy dowolną prostą  $K$ , przechodzącą przez punkt  $o$ . Niech  $l = O \cap K$ ,  $x' = ax \cap K$ ,  $x'' = bx \cap K$ . Jedynym kandydatem na biegun prostej  $K$  jest punkt  $k$ , dla którego zachodzi  $H(lk, ab)$ .

Przekształcenie, które każdemu elementowi prostej  $ax$  przyporządkowuje sprzężony z nim (w korelacji  $\psi$ ) punkt prostej  $bx$  jest przekształceniem rzutowym perspektywnym (z twierdzenia 3.4) o środku  $o$ . Zatem punktowi  $x'$  odpowiada w tym przekształceniu punkt  $x''$  i  $\psi(x') = kx''$ .

Teraz korelacja  $\psi$  jest wyznaczona jednoznacznie poprzez podanie wartości:  $\psi(o) = O$ ,  $\psi(a) = A$ ,  $\psi(b) = B$ ,  $\psi(x') = kx''$ .

Możemy łatwo stwierdzić, że korelacja  $\psi$  jest biegunowa — wystarczy pokazać, że trójkąt  $olk$  jest samobiegunowy (to zadanie pozostawiam Czytelnikowi) i skorzystać z twierdzenia 3.5.

Pokażemy teraz, że wszystkie punkty przecięcia prostych z pęku  $a^*$  z ich obrazami leżą na stożkowej wyznaczonej przez  $\psi$ : Weźmy dowolną prostą  $Y_a$  z pęku  $a^*$  oraz prostą  $Y_b = \lambda(Y_a)$ . Niech  $y = Y_a \cap Y_b$ . Chcemy pokazać, że punkt  $y$  leży na naszej stożkowej, czyli jest samo sprzężony w korelacji  $\psi$ . W tym celu wystarczy pokazać, że przekształcenie rzutowe  $\lambda'$ , które każdemu punktowi prostej  $Y_a$  przyporządkowuje sprzężony z nim punkt prostej  $Y_b$ , jest perspektywiczne. Niech  $y' = Y_a \cap K$ ,  $y'' = Y_b \cap K$ . Punkty  $y'$  i  $y''$  są sprzężone w korelacji  $\psi$  (wystarczy pokazać, że przekształcenie, które punktom  $K^*$  przyporządkowuje sprzężone z nimi punkty  $K^*$ , jest równe przekształceniu, które jest złożeniem: rzutu z  $K^*$  na  $a^*$ , przekształcenia  $\lambda$  oraz rzutu z  $b^*$  na  $K^*$ ). Przekształcenie  $\lambda'$  jest wyznaczone przez wartości:  $\lambda'(a) = A \cap Y_a$ ,  $\lambda'(Y_a \cap B) = b$ ,  $\lambda'(y') = y''$ , więc jest równe przekształceniu perspektywnemu o środku  $o$ . ■

**Ćwiczenie 3.3** Mamy okrąg o środku  $(0,0)$  i promieniu 1 na płaszczyźnie  $R^2$  z prostą niewłaściwą. Jakie przekształcenie rzutowe  $\lambda : (-1,0)^* \rightarrow (1,0)^*$  ma tę własność, że punkty



przecięcia prostych z ich obrazami leżą na tym okręgu?

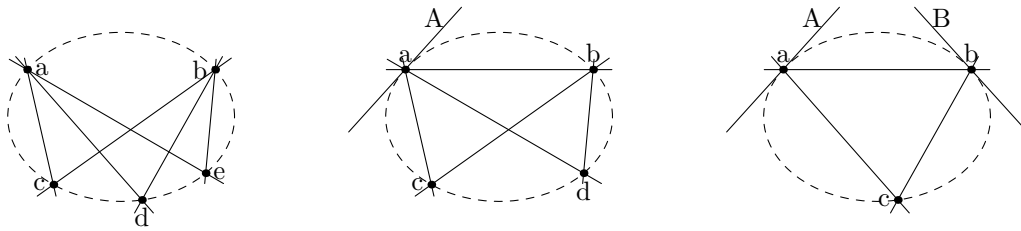
Korzystając z twierdzenia Steiner'a możemy łatwo udowodnić następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.8 (Braikenridge - MacLaurin)** *Pięć odpowiednich elementów wyznacza jednoznacznie stożkową:*

- (i) pięć punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe,
- (ii) cztery punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe i styczna w jednym z nich, nie przechodząca przez żaden z pozostałych punktów,
- (iii) trzy punkty nie leżące na jednej prostej i styczne w dwóch z nich, nie przechodzące przez żaden z pozostałych punktów,
- (iv) pięć prostych, spośród których żadne trzy nie są współpękowe,
- (v) cztery proste, spośród których żadne trzy nie są współpękowe i punkt styczności jednej z nich, nie leżący na żadnej z pozostałych prostych,
- (vi) trzy proste, które nie są współpękowe i punkty styczności dwóch z nich, nie leżące na żadnej z pozostałych prostych.

**Dowód:** (i) Mamy dane punkty  $a, b, c, d, e$ . Istnieje dokładnie jedno przekształcenie rzutowe  $\lambda : a^* \rightarrow b^*$ , dla którego zachodzi:  $\lambda(ac) = bc$ ,  $\lambda(ad) = bd$ ,  $\lambda(ae) = be$ . Przekształcenie to generuje stożkową przechodzącą przez punkty  $a, b, c, d, e$ .

Stożkowa ta jest jedyna: gdyby były dwie, to mielibyśmy dwa różne przekształcenia rzutowe, pokrywające się na trzech prostych.



(ii) Mamy punkty  $a, b, c, d$  i prostą  $A$ , przechodzącą przez punkt  $a$ . Uzasadnienie jest takie, jak poprzednio, tylko teraz przekształcenie  $\lambda : a^* \rightarrow b^*$  jest postaci:  $\lambda(A) = ab$ ,  $\lambda(ac) = bc$ ,  $\lambda(ad) = bd$ .

(iii) Tym razem mamy dane punkty  $a, b, c$  i proste  $A, B$  przechodzące odpowiednio przez punkty  $a$  i  $b$ . Uzasadnienie znowu jak w punkcie (i), dla przekształcenia  $\lambda : a^* \rightarrow b^*$  spełniającego warunki:  $\lambda(A) = ab$ ,  $\lambda(ab) = B$ ,  $\lambda(ac) = bc$ .

Punkty (iv) – (vi) są dualne do (i) – (iii). ■

Korzystając z twierdzeń 3.7 i 3.8 możemy wykonywać różne konstrukcje. Polecam zastanowienie się nad następującymi problemami:

**Ćwiczenie 3.4** *Mamy danych pięć punktów wyznaczających stożkową oraz prostą (nie styczną) przechodzącą przez jeden z tych punktów. Znaleźć drugi punkt przecięcia tej prostej ze stożkową.*

Wskazówka: zadanie sprowadza się do problemu wyznaczenia obrazu prostej w przekształceniu rzutowym pęku, określonym przez podanie trzech odpowiadających par prostych.

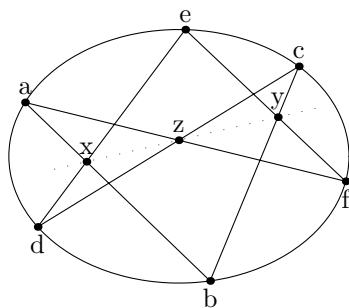
**Ćwiczenie 3.5** *Mamy danych pięć punktów  $a, b, c, d, e$  wyznaczających stożkową  $S$ . Dla dowolnego punktu  $x$  znaleźć jego biegunową w korelacji generowanej przez  $S$ .*

### 3.4. Twierdzenie Pascala i twierdzenie Brianchona

Jednymi z podstawowych twierdzeń o stożkowych w geometrii euklidesowej są twierdzenia Pascala i Brianchona. Pokażemy, że są one prawdziwe również na płaszczyźnie rzutowej.

**Twierdzenie 3.9 (Pascal)** *Punkty przecięcia przeciwległych boków sześciokąta wpisanego w stożkową są współliniowe.*

**Dowód:** Oznaczmy kolejne wierzchołki sześciokąta literami  $a, b, c, d, e, f$ . Niech  $x = ab \cap de$ ,  $y = bc \cap ef$ ,  $z = cd \cap fa$ . Chcemy pokazać, że punkty  $x, y, z$  są współliniowe.



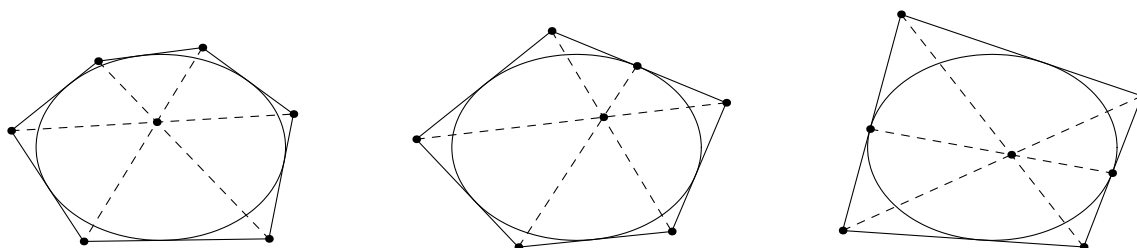
Niech  $\lambda$  oznacza przekształcenie rzutowe z pęku  $a^*$  w pęk  $c^*$ , w którym punkty przecięcia prostych z ich obrazami leżą na naszej stożkowej. Niech  $\lambda'$  będzie przekształceniem rzutowym z łańcucha  $de^*$  z łańcuch  $ef^*$ , które jest złożeniem: rzutu z  $de^*$  na  $a^*$ , przekształcenia  $\lambda$  oraz rzutu z  $c^*$  na  $ef^*$ .  $\lambda'(e) = e$ , więc przekształcenie to jest perspektywiczne.  $\lambda'(d) = cd \cap ef$  oraz  $\lambda'(af \cap de) = f$ , zatem punkt  $z$  jest środkiem perspektywicznym tego przekształcenia. Ponieważ  $\lambda'(x) = y$ , więc punkty  $x, y, z$  są współliniowe. ■

Twierdzenie 3.9 jest prawdziwe również dla sześciokątów zdegenerowanych, czyli takich, których kolejne wierzchołki mogą się pokrywać. Wtedy bok łączący takie wierzchołki zastępujemy styczną do stożkowej w danym punkcie.

Następujące twierdzenie jest dualne do twierdzenia Pascala:

**Twierdzenie 3.10 (Brianchon)** *Proste łączące przeciwległe wierzchołki sześciokąta opisanego na stożkowej przecinają się w jednym punkcie.*

Tak wygląda twierdzenie Brianchona dla sześciokąta niezdegenerowanego oraz dla różnych sześciokątów zdegenerowanych:

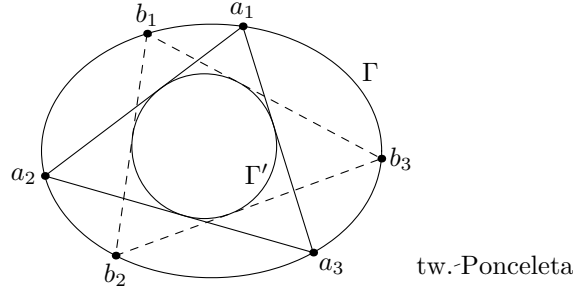


Korzystając z twierdzeń 3.9 i 3.10 możemy łatwo wykonywać różne konstrukcje. Warto zastanowić się, jak można ich użyć do rozwiązania zadania 3.4 oraz 3.5. Dużo podobnych zadań konstrukcyjnych można znaleźć w książce [6].

### 3.5. Wielkie twierdzenie Ponceleta

W tym podrozdziale udowodnimy następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.11 (Wielkie twierdzenie Ponceleta)** *Niech  $\Gamma, \Gamma'$  będą stożkowymi. Jeśli istnieje  $n$ -kąt  $a_1 \dots a_n$  wpisany w  $\Gamma$  i jednocześnie opisany na  $\Gamma'$ , to dla dowolnego punktu  $b_1 \in \Gamma$  istnieje  $n$ -kąt  $b_1 \dots b_n$  wpisany w  $\Gamma$  i opisany na  $\Gamma'$ .*



Przedstawimy dowód tego twierdzenia w modelu  $\mathbb{R}^2$  z prostą niewłaściwą.

#### 3.5.1. Pęk stożkowych

W naszym modelu każdej stożkowej odpowiada wielomian drugiego stopnia  $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ , gdzie  $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$  oraz  $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ . Punkty stożkowej to miejsca zerowe takiego wielomianu. Co więcej, każdemu wielomianowi tej postaci odpowiada stożkowa (być może pusta lub zdegenerowana — para prostych lub prosta „podwójna”). Więcej informacji na ten temat znajduje się w podrozdziale 4.1.3.

**Definicja 3.7** *Pękiem stożkowych generowanym przez stożkowe  $\Gamma_1$  oraz  $\Gamma_2$ , którym odpowiadają wielomiany  $f_1(x, y)$  i  $f_2(x, y)$ , jest zbiór wszystkich stożkowych wyznaczonych przez wielomiany  $\alpha \cdot f_1(x, y) + (1 - \alpha) \cdot f_2(x, y)$ , dla  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

Zachodzą następujące własności:

- pęk stożkowych jest generowany przez dowolne dwie stożkowe z pęku,
- jeżeli punkt należy do dwóch stożkowych z pęku  $\mathcal{F}$ , to należy on do wszystkich stożkowych z tego pęku,
- jeżeli  $\mathcal{F}$  jest pękiem stożkowych oraz  $p$  — punktem, który nie jest wspólny dla wszystkich stożkowych z  $\mathcal{F}$ , to w  $\mathcal{F}$  jest dokładnie jedna stożkowa, która przechodzi przez  $p$ ,
- jeżeli dwie stożkowe z pęku  $\mathcal{F}$  są styczne do pewnej prostej  $P$  w punkcie  $p$ , to pozostałe stożkowe z  $\mathcal{F}$  również mają tę własność.

Sprawdzenie, że powyższe własności zachodzą w modelu  $\mathbb{R}^2$  z prostą niewłaściwą wymaga przeprowadzenia kilku obliczeń, które tutaj pominiemy.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.12** *Niech  $\mathcal{F}$  będzie pękiem stożkowych oraz  $P$  — prostą, która nie zawiera punktów wspólnych dla wszystkich stożkowych z  $\mathcal{F}$  oraz nie jest zawarta w stożkowej zdegenerowanej z  $\mathcal{F}$ . Możemy utworzyć przekształcenie, które każdemu punktowi  $p \in P$  przyporządkowuje taki punkt  $p' \in P$ , że istnieje stożkowa z pęku  $\mathcal{F}$  zawierająca jednocześnie punkty  $p$  i  $p'$ . (Punkty stałe to punkty styczności stożkowych z  $\mathcal{F}$  do prostej  $P$ .) Przekształcenie takie jest inwolucją rzutową.*

Dowód twierdzenia znajduje się w książce [3].

**Wniosek 3.1** *Mamy pęki stożkowych  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{G}$  oraz stożkowe  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$ ,  $\Gamma'_1, \Gamma'_2 \in \mathcal{G}$  takie, że pary stożkowych  $\Gamma_1, \Gamma'_1$  oraz  $\Gamma_2, \Gamma'_2$  przecinają pewną prostą  $P$  w tych samych parach punktów. Wtedy pęki  $\mathcal{F}$  oraz  $\mathcal{G}$  generują na prostej  $P$  tę samą inwolucję.*

**Wniosek 3.2** *Mamy pęki stożkowych  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{G}$ , stożkową  $\Gamma$  należącą do obu pęków oraz stożkowe  $\Gamma_1 \in \mathcal{F}$ ,  $\Gamma'_1 \in \mathcal{G}$  takie, że  $\Gamma_1$  i  $\Gamma'_1$  przecinają pewną prostą  $P$  w tych samych punktach. Wtedy pęki  $\mathcal{F}$  oraz  $\mathcal{G}$  generują na prostej  $P$  tę samą inwolucję. (Nie przeszkadza nam ewentualny brak punktów przecięcia stożkowej  $\Gamma$  z prostą  $P$ .)*

Uzasadnienie powyższego wniosku można również znaleźć w książce [3].

### 3.5.2. Dowód twierdzenia Ponceleta

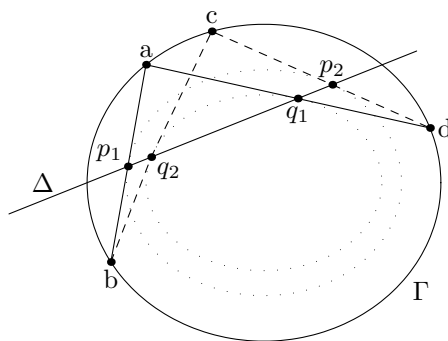
Najpierw udowodnimy następujący lemat:

**Lemat 3.13** *Niech  $\mathcal{F}$  będzie pękiem stożkowych oraz  $\Gamma$  — stożkową z tego pęku. Wtedy istnieje czworokąt  $abcd$  wpisany w  $\Gamma$ , dla którego zachodzi następująca własność: Dla każdej pary przeciwległych boków czworokąta istnieje stożkowa z pęku  $\mathcal{F}$ , która jest styczna do tych boków. Co więcej, wszystkie sześć punktów styczności leży na jednej prostej.*

Czworokąt taki jest wyznaczony przez podanie jego dwóch boków wraz z punktami styczności stożkowych (uwaga: oczywiście nie możemy wybrać dowolnego punktu na boku trójkąta i wymagać, żeby punkt styczności był akurat w tym miejscu — możemy wybierać wyłącznie spośród „dostępnych” punktów styczności ze stożkowymi z  $\mathcal{F}$ ).

**Dowód:** Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy mamy podane dwa sąsiednie boki  $ab$  i  $ad$  wraz z punktami styczności  $p_1 \in ab$  oraz  $q_1 \in ad$  odpowiednio dla stożkowych  $\Gamma_1$  oraz  $\Gamma_2$  z pęku  $\mathcal{F}$ . Niech  $\Delta = p_1q_1$ .

Oznaczmy przez  $p_2$  drugi punkt przecięcia stożkowej  $\Gamma_1$  z prostą  $\Delta$ .



Pokażemy, że punkt  $d$  leży na stycznej do stożkowej  $\Gamma_1$  w punkcie  $p_2$ , czyli prosta  $dp_2$  jest styczną do  $\Gamma_1$ . W tym celu wprowadzimy pęk stożkowych  $\mathcal{G}$ , generowany przez  $\Gamma_1$  oraz zdegenerowaną stożkową  $ab \cup dp_2$ . Zauważmy, że wszystkie stożkowe z pęku  $\mathcal{G}$  przechodzą przez punkty  $p_1$  (oraz, co więcej, są styczne do prostej  $ab$  w punkcie  $p_1$ ) i  $p_2$ . Pęki  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{G}$  generują na prostej  $ad$  tę samą inwolucję (z wniosku 3.2 — stożkowe  $\Gamma$  oraz  $ab \cup dp_2$  przecinają prostą  $ad$  w tych samych punktach, stożkowa  $\Gamma_1$  jest wspólna dla obu pęków). Stożkowa  $\Gamma_2$  z pęku  $\mathcal{F}$  jest styczna do prostej  $ad$  w punkcie  $q_1$ , więc w pęku  $\mathcal{G}$  również jest stożkowa, która ma tylko jeden punkt  $q_1$  wspólny z prostą  $ad$ . Z tego wynika, że do pęku  $\mathcal{G}$  należy stożkowa zdegenerowana — podwójna prosta  $\Delta$ . Rozpatrując stożkowe  $\Delta$  oraz  $ab \cup dp_2$  dostajemy, że

wszystkie stożkowe z pęku  $\mathcal{G}$  są styczne do prostej  $dp_2$  w punkcie  $p_2$ . Prosta  $dp_2$  jest więc styczna do stożkowej  $\Gamma_1$ .

Oznaczmy przez  $q_2$  punkt przecięcia stożkowej  $\Gamma_2$  z prostą  $\Delta$ , różny od punktu  $q_1$ . Podobnie jak poprzednio (zamieniając role stożkowych  $\Gamma_1$  oraz  $\Gamma_2$ ) można pokazać, że punkt  $b$  leży na stycznej do stożkowej  $\Gamma_2$  w punkcie  $q_2$ . Teraz, oznaczając przez  $c$  punkt przecięcia prostej  $dp_2$  ze stożkową  $\Gamma$  oraz przeprowadzając podobne operacje dla prostych  $ad$  i  $cd$  oraz punktów styczności  $q_1$  i  $p_2$ , możemy pokazać, że również punkt  $c$  leży na stycznej do stożkowej  $\Gamma_2$  w punkcie  $q_2$ .

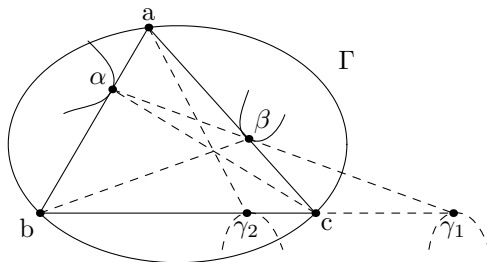
Pokazaliśmy więc, że dla dwóch par przeciwległych boków czworokąta  $abcd$  istnieją stożkowe z pęku  $\mathcal{F}$ , które są styczne do tych par boków. Pokażemy teraz, że dla trzeciej pary boków ( $ac$  oraz  $bd$ ) jest tak samo. Pęki  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{G}$  generują tę samą involucję na prostej  $ac$ , punkt  $\Delta \cap ac$  jest jedynym punktem przecięcia stożkowej  $\Delta$  z pęku  $\mathcal{G}$  z prostą  $ac$ . Zatem w pęku  $\mathcal{F}$  jest stożkowa, która jest styczna do prostej  $ac$  w tym punkcie. Podobnie jak poprzednio można pokazać, że stożkowa ta jest styczna do prostej  $bd$  w punkcie  $bd \cap \Delta$ .

W przypadku, gdy zamiast dwóch sąsiednich boków dostajemy parę boków przeciwległych  $ab$  i  $cd$ , wraz z punktami styczności  $p_1 \in ab$  oraz  $p_2 \in cd$  ze stożkową  $\Gamma_1 \in \mathcal{F}$ , zadanie możemy sprowadzić do poprzedniego przypadku. Pęki  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{G}$  (tak jak poprzednio – generowany przez stożkowe  $\Gamma_1$  i  $ab \cup cd$ ) generują tę samą involucję na prostej  $ac$ . W pęku  $\mathcal{G}$  istnieje stożkowa, która ma jeden punkt przecięcia  $r_1 = ac \cap \Delta$  z prostą  $ac$ . Zatem z pęku  $\mathcal{F}$  jest stożkowa  $\Gamma_3$ , styczna do prostej  $ac$  w punkcie  $r_1$  i zadanie sprowadza się do poprzedniego. ■

**Wniosek 3.3** Niech  $abc$  będzie dowolnym trójkątem wpisanym w stożkową  $\Gamma$ . Jeśli prosta  $\Delta$  przecina dwa boki tego trójkąta w punktach styczności ze stożkowymi z pewnego pęku  $\mathcal{F}$  oraz  $\Gamma \in \mathcal{F}$ , to  $\Delta$  przecina trzeci bok również w punkcie styczności z pewną stożkową z  $\mathcal{F}$ .

**Twierdzenie 3.14** Niech  $\Gamma$  będzie stożkową z pęku  $\mathcal{F}$ . Załóżmy, że dla pewnych punktów  $a, b, c \in \Gamma$  istnieją stożkowe  $\Gamma', \Gamma'' \in \mathcal{F}$ , takie że  $\Gamma'$  jest styczna do prostej  $ab$  w punkcie  $\alpha$  oraz  $\Gamma''$  jest styczna do prostej  $ac$  w punkcie  $\beta$ . Wtedy istnieją dokładnie dwie stożkowe  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$  styczne do prostej  $bc$  w pewnych punktach  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ . Ponadto zachodzi:

- (i) punkty  $\alpha, \beta$  oraz  $\gamma_1$  są współliniowe oraz
- (ii) proste  $a\gamma_2, b\beta$  oraz  $c\alpha$  przecinają się w jednym punkcie.



**Dowód:** Z wniosku 3.3 punkt  $\gamma_1 = \alpha\beta \cap bc$  jest punktem styczności pewnej stożkowej z pęku  $\mathcal{F}$  z prostą  $bc$ .

Z twierdzenia 3.12 wiemy, że pęk  $\mathcal{F}$  wyznacza na prostej  $bc$  involucję. Punkt  $\gamma_1$  jest punktem stałym tej involucji. Ponadto obrazem punktu  $b$  jest punkt  $c$ , a obrazem punktu  $c$  — punkt  $b$ . Niech  $\gamma_2$  będzie punktem, dla którego zachodzi  $H(bc, \gamma_1\gamma_2)$ . Przekształcenia rzutowe zachowują czwórkę harmoniczną, więc punkt  $\gamma_2$  również jest punktem stałym involucji, czyli jest punktem styczności pewnej stożkowej z  $\mathcal{F}$ .

Więcej takich punktów styczności nie ma, ponieważ involucja, która nie jest identycznością, nie może mieć więcej niż dwóch punktów stałych. Pokażemy jeszcze, że proste  $a\gamma_2, b\beta$

oraz  $c\alpha$  są współpękowe. Niech  $t = c\alpha \cap b\beta$ . Czworokąt  $a\alpha t\beta$  generuje czwórkę harmoniczną  $H(bc, \gamma_1\gamma_2)$  (dwie pary przeciwległych boków przecinają się odpowiednio w punktach  $b$  i  $c$ , jeden z pozostałych boków przechodzi przez punkt  $\gamma_1$ , więc ostatni bok musi przechodzić przez  $\gamma_2$ ). Zatem punkt  $t$  leży na prostej  $a\gamma_2$  i proste  $a\gamma_2, b\beta$  oraz  $c\alpha$  przecinają się w jednym punkcie. ■

**Definicja 3.8** *Trójkąt  $abc$  wpisany w stożkową  $\Gamma \in \mathcal{F}$ , którego kolejne boki są styczne do stożkowych  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{F}$  odpowiednio w punktach  $c', a', b'$  nazywamy:*

- (i) *stycznym do  $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ , jeżeli punkty styczności  $c', a', b'$  są współliniowe,*
- (ii) *opisanym na  $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ , jeżeli proste  $aa', bb', cc'$  są współpękowe.*

Podobną definicję możemy wprowadzić dla dowolnego  $n$ -kąta  $a_1 \dots a_n$  wpisanego w stożkową  $\Gamma \in \mathcal{F}$ , którego kolejne boki są styczne do stożkowych  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{F}$ : Rozważamy kolejno trójkąty  $a_1a_2a_3, a_1a_3a_4, \dots, a_1a_{n-1}a_n$ . Istnieją stożkowe  $\Gamma'_i \in \mathcal{F}$  ( $i = 3, \dots, n-1$ ) takie, że trójkąt  $a_1a_2a_3$  jest opisany na  $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma'_3$ , trójkąt  $a_1a_3a_4$  jest opisany na  $\Gamma'_3\Gamma_3\Gamma'_4, \dots$  trójkąt  $a_1a_{n-2}a_{n-1}$  jest opisany na  $\Gamma'_{n-2}\Gamma_{n-2}\Gamma'_{n-1}$ . Teraz, jeśli trójkąt  $a_1a_{n-1}a_n$  jest opisany na (styczny do)  $\Gamma'_{n-1}\Gamma_{n-1}\Gamma_n$  mówimy, że wielokąt  $a_1 \dots a_n$  jest opisany na (styczny do)  $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$ .

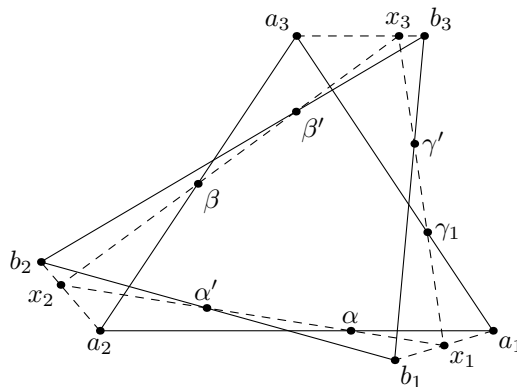
Można pokazać, że powyższa charakteryzacja nie zależy od wyboru wierzchołka początkowego  $a_1$ .

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie, które jest uogólnieniem wielkiego twierdzenia Ponceleta:

**Twierdzenie 3.15** *Dany jest wielokąt  $a_1 \dots a_n$  wpisany w stożkową  $\Gamma \in \mathcal{F}$  oraz opisany na  $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$  (z pęku  $\mathcal{F}$ ) i dowolny punkt  $b_1 \in \Gamma$ . Wtedy istnieje wielokąt  $b_1 \dots b_n$  wpisany w  $\Gamma$  i opisany na  $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$ .*

**Dowód:** Główna część dowodu polega na rozpatrzeniu przypadku  $n = 3$ :

Mamy dany trójkąt  $a_1a_2a_3$  wpisany w stożkową  $\Gamma$  i opisany na  $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ . Oznaczmy przez  $\alpha, \beta, \gamma$  kolejno punkty styczności  $\Gamma_1$  z prostą  $a_1a_2$ ,  $\Gamma_2$  z prostą  $a_2a_3$  i  $\Gamma_3$  z prostą  $a_3a_1$ . Niech  $b_1$  będzie dowolnym punktem na stożkowej  $\Gamma$ . Poprowadźmy dowolną styczną do  $\Gamma_1$  wychodzącą z punktu  $b_1$  i oznaczmy punkt styczności przez  $\alpha'$ , natomiast drugi punkt przecięcia tej stycznej ze stożkową  $\Gamma$  przez  $b_2$ .



Po zastosowaniu lematu 3.13 do czworokąta  $a_1a_2b_2b_1$  dostajemy, że w pęku  $\mathcal{F}$  istnieje stożkowa  $\Gamma'$ , która jest styczna do prostych  $a_1b_1$  oraz  $a_2b_2$  odpowiednio w punktach  $x_1 = a_1b_1 \cap \alpha\alpha'$  i  $x_2 = a_2b_2 \cap \alpha\alpha'$ .

Ponownie stosujemy lemat 3.13, tym razem dla czworokąta wyznaczonego przez boki  $a_2a_3$  i  $a_2b_2$  oraz punkty styczności  $\beta$  i  $x_2$ . Czwarty wierzchołek tego czworokąta oznaczmy przez  $b_3$ . Z lematu wiemy, że prosta  $b_2b_3$  jest styczna do stożkowej  $\Gamma_2$  w pewnym punkcie  $\beta'$ , a prosta  $a_3b_3$  jest styczna do  $\Gamma'$  w pewnym punkcie  $x_3$ . Co więcej, punkty  $x_2, \beta, \beta', x_3$  są współliniowe.

Chcemy teraz pokazać, że trójkąt  $b_1b_2b_3$  jest opisany na  $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ . Czworokąt  $a_1b_1b_3a_3$  jest wpisany w stożkową  $\Gamma$ , a stożkowa  $\Gamma'$  jest styczna do boków  $a_1b_1$  oraz  $a_3b_3$  odpowiednio w punktach  $x_1$  i  $x_3$ . Z lematu 3.13 istnieje stożkowa  $\Gamma'' \in \mathcal{F}$ , która jest styczna do  $a_1a_3$  oraz  $b_1b_3$  w punktach  $\gamma_1 = a_1a_3 \cap x_1x_3$  i  $\gamma' = b_1b_3 \cap x_1x_3$ . Pokażemy, że  $\Gamma'' = \Gamma_3$ , czyli kolejne boki trójkąta  $b_1b_2b_3$  są styczne odpowiednio do  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ .

Proste  $a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3$  są styczne do stożkowej  $\Gamma'$ , więc nie mogą one być współpękowe. Zatem trójkąty  $a_1a_2a_3$  oraz  $x_1x_2x_3$  nie mają środka perspektywicznego. Z twierdzenia Desarguesa nie mają one osi perspektywicznej, więc punkty  $\alpha, \beta, \gamma_1$  nie są współliniowe. Na prostej  $a_1a_3$  są dokładnie dwa punkty styczności ze stożkowymi z pęku  $\mathcal{F}$  (z twierdzenia 3.14). Jednym z nich jest punkt  $\gamma_1$ , natomiast drugi leży na prostej  $\alpha\beta$ . Ponieważ punkt  $\gamma$  jest punktem styczności prostej  $a_1a_3$  ze stożkową  $\Gamma_3$  oraz nie leży on na prostej  $\alpha\beta$ , więc  $\gamma = \gamma_1$  i  $\Gamma_3 = \Gamma''$ .

Proste  $x_1b_1, x_2b_2$  oraz  $x_3b_3$  nie są współpękowe, więc trójkąty  $x_1x_2x_3$  i  $b_1b_2b_3$  nie mają środka perspektywicznego ani osi perspektywicznej. Dostajemy więc, że punkty  $\alpha', \beta'$  i  $\gamma'$  nie są współliniowe. Zatem trójkąt  $b_1b_2b_3$  jest opisany na  $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ .

Pokazaliśmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla  $n = 3$ . Dowód dla dowolnego  $n$  jest już prosty:

Mamy wielokąt  $a_1 \dots a_n$  wpisany w stożkową  $\Gamma \in \mathcal{F}$  i opisany na  $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$  ( $\Gamma_i \in \mathcal{F}$ ). Wtedy istnieją stożkowe  $\Gamma'_3, \dots, \Gamma'_{n-1} \in \mathcal{F}$ , dla których zachodzi: trójkąt  $a_1a_2a_3$  jest opisany na  $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma'_3$ , trójkąt  $a_1a_3a_4$  jest opisany na  $\Gamma'_3\Gamma_3\Gamma'_4, \dots$  trójkąt  $a_1a_{n-1}a_n$  jest opisany na  $\Gamma'_{n-1}\Gamma_{n-1}\Gamma_n$ . Niech  $b_1$  będzie dowolnym punktem na stożkowej  $\Gamma$ . Z poprzedniej części dowodu wiemy, że istnieją punkty  $b_2 \dots b_n$ , dla których zachodzi: trójkąt  $b_1b_2b_3$  jest opisany na  $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma'_3$ , trójkąt  $b_1b_3b_4$  jest opisany na  $\Gamma'_3\Gamma_3\Gamma'_4, \dots$  trójkąt  $b_1b_{n-1}b_n$  jest opisany na  $\Gamma'_{n-1}\Gamma_{n-1}\Gamma_n$ . Zatem wielokąt  $b_1 \dots b_n$  jest opisany na  $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$ . ■

**Dowód twierdzenia 3.11:** Twierdzenie to jest już tylko prostą konsekwencją twierdzenia 3.15. Załóżmy, że dla danych stożkowych  $\Gamma, \Gamma'$  istnieje  $n$ -kąt  $a_1 \dots a_n$  wpisany w  $\Gamma$  i jednocześnie opisany na  $\Gamma'$ . Wszystkie boki wielokąta  $a_1 \dots a_n$  są styczne do  $\Gamma'$ . Musi więc zachodzić:  $a_1 \dots a_n$  jest opisany na lub styczny do  $\Gamma' \dots \Gamma'$ . Pokażemy, że ta druga sytuacja nie może wystąpić.

Załóżmy, że  $a_1 \dots a_n$  jest styczny do  $\Gamma' \dots \Gamma'$ . Niech  $\Gamma'' \neq \Gamma'$  będzie stożkową z pęku generowanego przez  $\Gamma$  i  $\Gamma'$ , która jest styczna do prostej  $a_n a_1$ . Wtedy wielokąt  $a_1 \dots a_n$  jest opisany na  $\Gamma' \dots \Gamma'\Gamma''$ . Z twierdzenia 3.15 można pokazać (wybierając  $b_1 = a_2$ ), że również wielokąt  $a_2 \dots a_n a_1$  jest opisany na  $\Gamma' \dots \Gamma'\Gamma''$ . Wykonując takie „przesunięcie”  $n - 1$  razy dostaniemy, że wszystkie boki wielokąta  $a_1 \dots a_n$  są styczne do  $\Gamma''$ . Stożkowa jest jednoznacznie wyznaczona przez podanie pięciu stycznych, więc w przypadku  $n \geq 5$  otrzymujemy, że  $\Gamma' = \Gamma''$ . To daje sprzeczność, ponieważ  $\Gamma''$  wybraliśmy tak, aby była różna od  $\Gamma'$ .

Przypadek  $n = 3$  jest oczywisty (trójkąt  $a_1a_2a_3$  nie może być styczny do  $\Gamma'\Gamma'\Gamma'$ , ponieważ dwa boki tego trójkąta musiałyby się pokrywać). Przypadek  $n = 4$  pozostawiam do udowodnienia Czytelnikowi (wskazówka: proste łączące punkty styczności na bokach  $a_1a_2, a_2a_3$  oraz  $a_3a_4, a_4a_1$  przecinają się na prostej  $a_1a_3$ ). ■





# Rozdział 4

## Stożkowe w geometrii afinicznej i euklidesowej

### 4.1. Stożkowe afiniczne

W tym podrozdziale będziemy zajmować się płaszczyzną afiniczną nad ciałem  $K$  (łącznym, przemiennym). Przedstawimy własności przekształceń afinicznych oraz związek pomiędzy płaszczyzną afiniczną i rzutową, a następnie zajmiemy się stożkowymi na płaszczyźnie afinicznej.

#### 4.1.1. Przekształcenia afiniczne

**Definicja 4.1** Niech  $A$  będzie płaszczyzną afiniczną nad ciałem (łącznym, przemiennym)  $K$ . Przekształceniem afinicznym nazywamy przekształcenie  $f : A \rightarrow A$  następującej postaci:

$$f((x, y)) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } a_{ij}, b_i \in K \text{ oraz } \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Przekształcenie afiniczne ma następujące własności:

- Jest bijekcją.
- Obrazem trójki punktów współliniowych jest trójka punktów współliniowych.
- Obrazem trójki punktów niewspółliniowych jest trójka punktów niewspółliniowych.
- Obrazem prostej jest (cała) prosta.
- Proste równoległe przechodzą na proste równoległe.
- Złożenie przekształceń afinicznych jest przekształceniem afinicznym.
- Przekształcenie odwrotne do przekształcenia afinicznego jest dobrze określone i jest przekształceniem afinicznym.

Udowodnienie tych własności wymaga przeprowadzenia prostych obliczeń, które tu pominiemy.

Przedstawimy teraz przykłady przekształceń afinicznych:

- translacja:  $f((x, y)) = (x + b_1, y + b_2)$ ,

- jednokładność o środku  $(x_0, y_0)$  i skali  $\lambda$ :  $f((x, y)) = (\lambda x + (1 - \lambda)x_0, \lambda y + (1 - \lambda)y_0)$ ,
- symetria względem prostej  $y = 0$ :  $f((x, y)) = (x, -y)$ .

**Twierdzenie 4.1** *Niech  $A$  będzie płaszczyzną afiniczną, a  $p_1, p_2, p_3$  oraz  $q_1, q_2, q_3$  — trójkami niewspółliniowych punktów. Wtedy istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne, które przeprowadza  $p_1$  na  $q_1$ ,  $p_2$  na  $q_2$  i  $p_3$  na  $q_3$ .*

**Dowód:** Na początek udowodnimy, że dla dowolnej trójki niewspółliniowych punktów  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne, które przeprowadza punkty  $(0, 0)$  na  $(x_1, y_1)$ ,  $(0, 1)$  na  $(x_2, y_2)$  i  $(1, 0)$  na  $(x_3, y_3)$ .

Założmy, że pewne przekształcenie  $f((x, y)) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  ma tę własność. Podstawiając do przekształcenia  $f$  punkty  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  i  $(1, 0)$  otrzymujemy, że musi ono być postaci:  $f((x, y)) = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ .

Punkty  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  nie są współliniowe, więc macierz  $\begin{bmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{bmatrix}$  ma niezerowy wyznacznik i otrzymane przekształcenie jest afiniczne. Z konstrukcji wiemy też, że jest to jedyne przekształcenie afiniczne spełniające podane warunki.

Przekształcenie afiniczne, które przeprowadza punkty  $p_1$  na  $q_1$ ,  $p_2$  na  $q_2$  i  $p_3$  na  $q_3$  jest złożeniem przekształceń afinicznych, z których jedno przekształca punkty  $p_1, p_2, p_3$  odpowiednio na  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  i  $(1, 0)$ , natomiast drugie przeprowadza punkty  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  na  $q_1, q_2, q_3$ . Przekształcenie takie jest jedyne, ponieważ w przeciwnym razie potrafilibyśmy uzyskać więcej przekształceń afinicznych, które przeprowadzają pewną trójkę punktów na punkty  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  i  $(1, 0)$ , a pokazaliśmy już, że taka sytuacja nie może wystąpić. ■

#### 4.1.2. Płaszczyzna afiniczna a płaszczyzna rzutowa

Niech  $A$  będzie płaszczyzną afiniczną nad ciałem  $K$  (łącznym, przemiennym). Pokażemy, w jaki sposób można rozszerzyć płaszczyznę  $A$  do płaszczyzny rzutowej.

Każdej prostej na płaszczyźnie afinicznej możemy przypisać pewien kierunek. Prostej o równaniu  $y = ax + b$  ( $a, b \in K$ ) przypisujemy kierunek  $a$ , natomiast prostej  $x = c$  ( $c \in K$ ) kierunek  $\infty$ . Proste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam kierunek. Płaszczyznę  $A$  rozszerzamy w następujący sposób: dla każdego kierunku dodajemy punkt odpowiadający temu kierunkowi. Punkty te nazywamy punktami niewłaściwymi. Każda prosta przechodzi teraz dodatkowo przez punkt niewłaściwy odpowiadający jej kierunkowi. Wszystkie punkty niewłaściwe umieszczamy na dodatkowej prostej zwanej prostą niewłaściwą. Tak utworzoną płaszczyznę oznaczmy przez  $\bar{A}$ . Pokażemy, że  $\bar{A}$  spełnia aksjomaty płaszczyzny rzutowej.

Aksjomaty 2.1 i 2.2: przez dwa punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Wystarczy rozważyć trzy przypadki: gdy oba punkty są właściwe, jeden jest właściwy lub oba są niewłaściwe.

Aksjomat 2.3: każde dwie proste się przecinają. Proste właściwe, które nie są równoległe, przecinają się na płaszczyźnie  $A$ , więc tym bardziej na  $\bar{A}$ . Proste właściwe, które są równoległe, przecinają się w punkcie niewłaściwym odpowiadającym ich kierunkowi. Prosta właściwa przecina się z prostą niewłaściwą w punkcie niewłaściwym, który odpowiada jej kierunkowi.

Aksjomat 2.4: istnieje czworokąt. Do ciała  $K$  należą elementy 0 i 1. Punkty  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  i  $(1, 0)$  tworzą czworokąt (żadne trzy spośród tych punktów nie są współliniowe).

Aksjomat 2.5 (Fano): punkty przecięcia przeciwległych boków czworokąta nie są współliniowe. Aby pokazać, że aksjomat ten jest spełniony, wystarczy rozważyć przypadki, gdy dwa, trzy lub cztery wierzchołki czworokąta są punktami właściwymi oraz wykonać trochę obliczeń.

Aksjomat 2.6: twierdzenie Pappusa. Jest to twierdzenie geometrii afinicznej (uzasadnienie można znaleźć m.in. w książce [3]).

Pokażemy teraz związek między przekształceniami afinicznymi płaszczyzny  $A$  i kolineacjami rzutowymi płaszczyzny  $\bar{A}$ .

**Twierdzenie 4.2** *Każde przekształcenie afiniczne  $f$  płaszczyzny  $A$  rozszerza się jednoznacznie do kolineacji rzutowej  $\bar{f}$  płaszczyzny  $\bar{A}$ .*

**Dowód:** Zdefiniujemy przekształcenie  $\bar{f}$  na punktach niewłaściwych i prostej niewłaściwej. Proste równoległe przechodzą przy przekształceniu afinicznym na proste równoległe. Jeśli proste o kierunku  $a$  przechodzą na proste o kierunku  $a'$ , to obrazem punktu niewłaściwego  $a$  przy przekształceniu  $\bar{f}$  musi być punkt niewłaściwy  $a'$ . Prosta niewłaściwa jest prostą stałą.

Pokażemy, że przekształcenie  $\bar{f}$  jest kolineacją rzutową. Przede wszystkim obrazami prostych są proste. Wystarczy jeszcze pokazać (tw. 2.7), że przekształcenie  $\bar{f}$  obcięte do pewnej prostej jest rzutowe. Weźmy prostą  $y = 0$ . Przekształcenie  $\bar{f}$  na tej prostej jest postaci  $\bar{f}(x, 0) = (a_{11}x + b_1, a_{21}x + b_2)$ , gdzie  $a_{11}, a_{21}, b_1, b_2 \in K$ ,  $(a_{11}, a_{21}) \neq (0, 0)$ . Przekształcenie takie można łatwo przedstawić jako złożenie przekształceń perspektywicznych, więc  $\bar{f}$  jest kolineacją rzutową.

Przekształcenie  $\bar{f}$  spełniające warunki twierdzenia jest jedyne, ponieważ inne przydzielenie wartości dla punktów niewłaściwych spowoduje, że  $\bar{f}$  nie będzie przeprowadzać prostych na proste. ■

**Twierdzenie 4.3** *Niech  $\bar{f}$  będzie kolineacją rzutową płaszczyzny  $\bar{A}$ , dla której prosta niewłaściwa jest prostą stałą. Wtedy  $\bar{f}|_A$  jest przekształceniem afinicznym.*

**Dowód:** Weźmy dowolne punkty niewspółliniowe  $k, l, m \in A$ . Niech  $K = lm, L = km, M = kl$  oraz  $K' = \bar{f}(K), L' = \bar{f}(L), M' = \bar{f}(M)$ . Zgodnie z założeniem prosta niewłaściwa jest prostą stałą. Pary prostych  $K, L, M$  przecinają się na płaszczyźnie  $A$ . Ponieważ w przekształceniu  $\bar{f}$  punkty właściwe przechodzą na właściwe oraz niewłaściwe na niewłaściwe, to punkty  $m' = K' \cap L', l' = K' \cap M'$  i  $k' = L' \cap M'$  leżą na płaszczyźnie  $A$ .

Istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne  $f'$  płaszczyzny  $A$ , które przeprowadza punkt  $k$  na  $k', l$  na  $l'$  i  $m$  na  $m'$ . Przekształcenie to przeprowadza prostą  $K$  na  $K', L$  na  $L'$  i  $M$  na  $M'$ . Przekształcenie  $f'$  rozszerza się do kolineacji rzutowej  $\bar{f}'$ . Ponieważ  $\bar{f}$  i  $\bar{f}'$  są przekształceniami rzutowymi, które pokrywają się na czterech prostych ( $K, L, M$  i prosta niewłaściwa), więc  $\bar{f} = \bar{f}'$ . Zatem  $\bar{f}|_A = f'$  i  $\bar{f}|_A$  jest afiniczne. ■

### 4.1.3. Stożkowe

Zdefiniujemy teraz stożkowe na płaszczyźnie afinicznej. Definicja ta różni się znacznie od definicji stożkowych na płaszczyźnie rzutowej. Pokażemy jednak, że definicje te są równoważne: stożkowe afiniczne płaszczyzny  $A$  odpowiadają stożkowym rzutowym płaszczyzny  $\bar{A}$  i na odwrót.

**Definicja 4.2** *Niech  $A$  będzie płaszczyzną afiniczną nad ciałem  $K$  (łącznym, przemiennym, o charakterystyce różnej od 2). Stożkową nazywamy zbiór rozwiązań równania kwadratowego*

$f(x, y) = 0$  gdzie  $f(x, y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6$ ,  $a_i \in K$  oraz nie wszystkie spośród liczb  $a_1, a_2, a_3$  są równe 0.

Jeśli zbiór rozwiązań tego równania jest pusty, jest nim punkt, prosta „podwójna” lub dwie proste, to mówimy, że stożkowa jest zdegenerowana.

Stożkowe rzutowe zostały zdefiniowane jako miejsca zerowe korelacji biegunowej. Aby pokazać, że stożkowe afiniczne płaszczyzny  $A$  i stożkowe rzutowe płaszczyzny  $\bar{A}$  odpowiadają sobie nawzajem, musimy najpierw zastanowić się, jak wygląda korelacja biegunowa płaszczyzny  $\bar{A}$ .

Na płaszczyźnie  $A$  mamy dany układ współrzędnych. Każdy punkt  $p \in A$  możemy przedstawić jako parę  $(x, y) \in K^2$ . Na płaszczyźnie  $\bar{A}$  również można wprowadzić współrzędne. Będą to współrzędne jednorodnie — elementy  $(K^3 \setminus (0, 0, 0)) / \sim$ , gdzie  $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej stałej  $\lambda \in K \setminus 0$  zachodzi:  $(x_1, x_2, x_3) = \lambda(y_1, y_2, y_3)$ .

Współrzędne takie biorą się stąd, że płaszczyznę  $A$  możemy umieścić w przestrzeni  $K^3$ , na przykład jako płaszczyznę poziomą przechodzącą przez punkt  $(0, 0, 1)$ . Wtedy, tak jak w modelu przedstawionym w podrozdziale 2.2.2, punktom odpowiadają proste przechodzące przez punkt  $(0, 0, 0)$  (czyli klasy abstrakcji punktów w relacji  $\sim$ ).

Elementom  $(x, y) \in A$  będą odpowiadały współrzędne  $(x, y, 1)$ , a elementom niewłaściwym reprezentującym kierunki prostych  $ay = bx$  — współrzędne  $(a, b, 0)$ . Każdą prostą reprezentuje pewien zbiór  $\{(t_1, t_2, t_3) : \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \alpha_3 t_3 = 0, \alpha_i \in K, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0)\}$ . Na przykład prostej niewłaściwej odpowiada zbiór  $\{(t_1, t_2, t_3) : t_3 = 0\}$ .

**Twierdzenie 4.4** *Kolineacje rzutowe płaszczyzny  $\bar{A}$  to przekształcenia postaci:*

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

**Dowód:** Przede wszystkim zauważmy, że przekształcenie takie jest dobrze określone: jest jednorodnie ( $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda f(x, y, z)$ ) i przeprowadza punkty różne od  $(0, 0, 0)$  na punkty różne od  $(0, 0, 0)$ .

Przekształcenie to przeprowadza proste na proste (aby to wykazać, wystarczy wykonać proste obliczenia) i jest rzutowe (można je przedstawić jako złożenie przekształceń perspektywicznych), jest więc kolineacją rzutową. Ponadto jest ono jednoznacznie wyznaczone przez podanie wartości na czterech punktach, spośród których żadne trzy nie są współliniowe (uzasadnienie takie jak w twierdzeniu 4.1 — tym razem rozpatrujemy przekształcenie, które przeprowadza punkty  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  i  $(1, 1, 1)$  na odpowiednie cztery punkty).

Dostajemy więc, że każde przekształcenie tej postaci jest kolineacją, a także każda kolineacja rzutowa jest tej postaci. ■

Przestrzeń dualna  $\bar{A}^*$  jest izomorficzna z  $\bar{A}$  (na przykład każdemu punktowi  $(a, b, c) \in \bar{A}$  możemy przypisać funkcjonał  $ax + by + cz$ ). Izomorfizm między tymi przestrzeniami nazywamy korelacją. Funkcjonał  $ax + by + cz$  z przestrzeni  $\bar{A}^*$  możemy utożsamić z prostą  $ax + by + cz = 0$  na płaszczyźnie  $\bar{A}$ , więc taka definicja korelacji jest równoważna definicji z rozdziału 2.

Równanie korelacji rzutowej ma taką samą postać jak równanie kolineacji rzutowej:

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Jeżeli dla punktu  $(a, b, c)$  zachodzi  $f(a, b, c) = (a', b', c')$ , oznacza to, że w danej korelacji rzutowej punktowi  $(a, b, c)$  odpowiada prosta  $a'x + b'y + c'z = 0$ .

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 4.5** *Korelacja rzutowa  $\phi$  jest biegunowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary punktów  $p_1, p_2$  zachodzi: jeżeli  $p_1|\phi(p_2)$ , to  $p_2|\phi(p_1)$ .*

**Dowód:** Pokażemy, że zachodzą implikacje w obie strony:

( $\Rightarrow$ ) Jeżeli korelacja  $\phi$  jest biegunowa, to  $\phi(\phi(p_2)) = p_2$ . Ponieważ korelacja zachowuje relację incydencji, więc  $p_1|\phi(p_2)$  implikuje  $p_2|\phi(p_1)$ .

( $\Leftarrow$ ) Niech  $P$  będzie dowolną prostą oraz  $p = \phi(P)$ . Chcemy pokazać, że musi zachodzić:  $P = \phi(p)$ . Niech  $q, r$  będą dowolnymi punktami na prostej  $P$ . Wtedy  $p|\phi(q)\phi(r)$  i z założenia  $\phi(p)|qr$ . Zatem  $\phi(p) = P$ . ■

**Twierdzenie 4.6** *Korelacja rzutowa jest biegunowa wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz jest symetryczna.*

**Dowód:** Niech  $f$  będzie korelacją rzutową daną wzorem:  $f(x, y, z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z)$ . Wtedy obrazem dowolnego punktu  $(x, y, z)$  jest prosta  $\{(X, Y, Z) : (a_1x + a_2y + a_3z)X + (b_1x + b_2y + b_3z)Y + (c_1x + c_2y + c_3z)Z = 0\}$ .

Z twierdzenia 4.5 dostajemy, że  $f$  jest biegunowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary punktów  $(x, y, z)$  i  $(X, Y, Z)$  następujące warunki są równoważne:

- (i)  $(a_1x + a_2y + a_3z)X + (b_1x + b_2y + b_3z)Y + (c_1x + c_2y + c_3z)Z = 0$ ,
- (ii)  $(a_1X + a_2Y + a_3Z)x + (b_1X + b_2Y + b_3Z)y + (c_1X + c_2Y + c_3Z)z = 0$ .

Dla macierzy symetrycznej powyższe warunki są oczywiście równoważne. Ponadto, jeśli macierz  $f$  nie jest symetryczna, można wskazać taką parę punktów, dla której tylko jeden z tych warunków będzie spełniony. ■

Teraz możemy już pokazać, że obie definicje stożkowych są równoważne.

Niech  $f$  będzie korelacją biegunową. Wtedy  $f$  ma postać:

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \neq 0.$$

Obrazem punktu  $(x, y, z)$  jest prosta  $\{(X, Y, Z) : (ax + by + cz)X + (bx + dy + ez)Y + (cx + ey + fz)Z = 0\}$ . Punkt  $(x, y, z)$  jest samosprężony wtedy i tylko wtedy, gdy należy do tej prostej, czyli gdy zachodzi  $(ax + by + cz)x + (bx + dy + ez)y + (cx + ey + fz)z = ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz = 0$ . Punktom samosprężonym odpowiadają na płaszczyźnie  $A$  punkty, dla których zachodzi:  $ax^2 + 2bxy + dy^2 + 2cx + 2ey + f = 0$ . Macierz  $f$  jest odwracalna, więc spełniony jest warunek  $(a, d, b) \neq (0, 0, 0)$  i powyższe równanie jest równaniem stożkowej afinicznej.

Na podstawie równania stożkowej afinicznej można znaleźć macierz korelacji biegunowej, która określa stożkową rzutową odpowiadającą danej stożkowej afinicznej.

W tym rozdziale pokazaliśmy, że obie definicje stożkowych dla płaszczyzny afinicznej są równoważne. Zatem twierdzenia o stożkowych, które zostały udowodnione w poprzednim rozdziale, są prawdziwe również na płaszczyźnie afinicznej. Oczywiście niektóre z tych twierdzeń w wersji afinicznej brzmią nieco inaczej, ponieważ w miejscu niektórych punktów (czyli punktów niewłaściwych) mamy kierunki prostych.

#### 4.1.4. Klasyfikacja stożkowych afinicznych

**Twierdzenie 4.7** Niech  $f$  będzie przekształceniem afinicznym płaszczyzny  $A$ , a  $C$  stożkową opisaną pewnym równaniem kwadratowym  $s(x, y) = 0$ . Wtedy obrazem  $C$  przy przekształceniu  $f$  również jest stożkowa.

Co więcej, jeśli stożkowa  $C$  jest niezdegenerowana, to  $f(C)$  również jest niezdegenerowana.

**Dowód:** Zbiór  $f(C)$  można przedstawić przy pomocy następującego równania:  $f(C) = \{f(x, y) : s(x, y) = 0\} = \{(x, y) : s(f^{-1}(x, y)) = 0\}$ .

Przekształcenie  $f^{-1}$  jest afiniczne, więc można je przedstawić w postaci:  $f^{-1}(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f)$ , gdzie  $a, b, c, d, e, f \in K$  oraz  $ae - bd \neq 0$ .

Wtedy równanie dla zbioru  $f(C)$  jest postaci  $s(ax + by + c, dx + ey + f) = 0$  i jest ono równaniem kwadratowym. Współczynniki przy  $x^2$ ,  $xy$  i  $y^2$  nie mogą wynosić jednocześnie 0, ponieważ wtedy zbiór  $f(C)$  byłby któregoś z następujących postaci: zbiór pusty, prosta lub cała płaszczyzna. Wtedy zbiór  $C$  również byłby takiej postaci (przekształcenie  $f^{-1}$  przekształca prostą na prostą i płaszczyznę na płaszczyznę), a założyliśmy, że sytuacja taka nie może wystąpić.

Podobnie pokazujemy, że jeśli stożkowa  $C$  jest niezdegenerowana, to również  $f(C)$  jest niezdegenerowana (jeżeli obrazem jednej z tych stożkowych jest punkt, prosta podwójna, dwie proste lub obraz ten jest pusty, druga stożkowa również jest takiej postaci). ■

**Twierdzenie 4.8** Każdą stożkową, która jest niezdegenerowana, można przekształcić afinicznie do jednej z następujących postaci:

(i)  $x^2 + y^2 = 1$ , (ii)  $y = x^2$ , (iii)  $xy = 1$ .

**Dowód:** Każda stożkowa dana jest równaniem postaci:  $f(x, y) = 0$  gdzie  $f(x, y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6$  oraz  $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ . Wykonując kolejne przekształcenia afiniczne, możemy doprowadzić równanie do postaci:

1.  $a_1 \neq 0$ : Wiemy, że  $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ . Poprzez ewentualne wykonanie przekształcenia  $f'(x, y) = (y, x)$  lub  $f'(x, y) = (x, x + y)$  możemy doprowadzić równanie do postaci, w której współczynnik przy  $x^2$  jest niezerowy.

2.  $a_1 \neq 0, a_2 = 0$ : Poprzez wykonanie przekształcenia  $f''(x, y) = (x - \frac{a_2}{2a_1}y, y)$  doprowadzamy równanie do postaci, w której  $a_1 \neq 0$  oraz  $a_2 = 0$ .

3.  $a_1 = 1, a_2 = 0$ .

4.  $a_1 = 1, a_2 = 0, a_4 = 0$ : Wystarczy wykonać przekształcenie  $f'''(x, y) = (x - \frac{a_4}{2}, y)$ .

Równanie nasze jest teraz postaci  $x^2 + a_3y^2 + a_5y + a_6 = 0$ . Jeżeli współczynnik przy  $y^2$  jest równy 0, to równanie możemy łatwo przekształcić do postaci (ii). W przeciwnym razie, wykonując podobną operację jak w kroku 4, możemy sprowadzić równanie do postaci  $x^2 + y^2 = 1$  (czyli (i)) lub  $x^2 - y^2 = 1$  (z tej postaci, poprzez operację  $f''''(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$ , dostajemy (iii)).

Z twierdzenia 4.7 wiemy, że w żadnym z kroków stożkowa nie zacznie być zdegenerowana. ■

Teraz pokażemy, że stożkowych opisanych równaniami (i), (ii) oraz (iii) nie można przekształcać na siebie za pomocą przekształceń afinicznych. Stożkowym tym odpowiadają na płaszczyźnie  $\bar{A}$  korelacje biegunowe o następujących macierzach:

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (iii) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

W pierwszym przypadku do stożkowej nie należą żadne punkty niewłaściwe, w drugim przypadku — jeden punkt niewłaściwy (odpowiadający kierunkowi prostej  $x = 0$ ), natomiast w trzecim przypadku — dwa punkty niewłaściwe (odpowiadające kierunkom prostych  $x = 0$  i  $y = 0$ ).

Zatem te stożkowe nie są afinicznie równoważne i na płaszczyźnie afinicznej (podobnie jak na płaszczyźnie euklidesowej) wyróżniamy trzy rodzaje stożkowych.

## 4.2. Stożkowe euklidesowe

Na płaszczyźnie euklidesowej stożkowe definiujemy tak samo jak na płaszczyźnie afinicznej, zatem twierdzenia o stożkowych, które udowodniliśmy w poprzednich rozdziałach, pozostają prawdziwe. Dodatkowo mamy pojęcie odległości, więc możemy badać metryczne własności stożkowych.

Każdą stożkową na płaszczyźnie euklidesowej można przekształcić za pomocą izometrii do jednej z następujących postaci:

$$(i) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (ii) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (iii) y = cx^2.$$

Ponadto nie istnieją izometrie, które pozwalałyby przeprowadzić stożkowe jednego rodzaju na stożkowe innego rodzaju. Stożkowe odpowiednich rodzajów nazywamy odpowiednio: elipsa, hiperbola i parabola. Elipsa, dla której zachodzi  $a = b$ , to okrąg.

Niech  $dist(p, P)$  oznacza odległość punktu  $p$  od prostej  $P$ . Pokażemy, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 4.9** *Niech  $D$  będzie dowolną prostą, a  $f \notin D$  — dowolnym punktem. Wtedy dla każdego  $e \in \mathbb{R}^+$  zbiór  $S = \{p \in \mathbb{R}^2 : |pf| = e \cdot dist(p, D)\}$  jest stożkową. Dla  $e < 1$  stożkowa ta jest elipsą, dla  $e = 1$  parabolą, a dla  $e > 1$  hiperbolą.*

*Ponadto każdą stożkową różną od okręgu możemy przedstawić w takiej postaci.*

**Dowód:** Rozpatrzmy najpierw przypadek  $e = 1$ . Obrazem (jak również przeciwobrazem) stożkowej przy izometrii jest stożkowa tego samego typu. Możemy więc najpierw wykonać izometrię, która przeprowadzi prostą  $D$  na pewną prostą  $y = -c$ , a punkt  $f$  na punkt  $(0, c)$ . Wtedy zbiór  $S$  jest następującej postaci:

$$S = \{(x, y) : x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2\} = \{(x, y) : y = \frac{x^2}{4c}\}, \text{ czyli } S \text{ jest parabolą.}$$

Niech teraz  $e \neq 1$ . Tym razem wykonamy izometrię, która przeprowadzi prostą  $D$  na pewną prostą  $x = \frac{c}{e^2}$ , a punkt  $f$  na punkt  $(c, 0)$ . Wtedy:

$$S = \{(x, y) : (x - c)^2 + y^2 = e^2 \cdot (x - \frac{c}{e^2})^2\} = \{(x, y) : \frac{x^2}{(c/e)^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)(c/e)^2} = 1\}. \text{ Dla } e < 1 \text{ zbiór ten jest elipsą, a dla } e > 1 \text{ — hiperbolą.}$$

Łatwo pokazać, że każdą stożkową różną od okręgu można przedstawić w takiej postaci. Wystarczy rozważyć stożkowe opisane równaniami:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dla  $a^2 \neq b^2$ ,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , oraz  $y = cx^2$  i dla każdej z tych stożkowych znaleźć wartości  $c$  i  $e$ . ■

**Definicja 4.3** *Niech  $S$  będzie stożkową postaci  $S = \{p \in \mathbb{R}^2 : |pf| = e \cdot dist(p, D)\}$ . Wtedy liczbę  $e$  nazywamy mimośrodem, punkt  $f$  — ogniskiem, a prostą  $D$  — kierownicą stożkowej.*

Teoria stożkowych euklidesowych została zapoczątkowana już w zamierzczej starożytności i ma obszerną literaturę.





# Bibliografia

- [1] H.S.M. Coxeter, „*Wstęp do geometrii dawnej i nowej*”, PWN 1967
- [2] H.S.M. Coxeter, „*Non-euclidean geometry*”, the University of Toronto Press, 1957
- [3] M.Berger, „*Geometry I*”, „*Geometry II*”, Springer 2004
- [4] H.Lebesgue, „*Les coniques*”, Gathier-Villars, 1955
- [5] F.Enriques, „*Wykłady geometryi rzutowej*”, Warszawa 1917
- [6] M.P. Tcherniaev, „*Sbornik zadatch po sinteticheskoj geometrii*”, Utchpedgiz 1954