Instytut Informatyki
Anna Zych

12. Listopad 2014

Rachunek Prawdopodobieństwa Seria 7 Z14

Poznane rozkłady dyskretne:

rozkład	oznaczenie	wzór	zakres
Jednostajny		$\frac{1}{b-a+1}$	$k = a, \ldots, b$
Bernouliego	$X \sim \text{Binom}(1, p)$	$\binom{1}{k} p^k (1-p)^{1-k}$	$k = 0, 1$
Dwumianowy	$X \sim \text{Binom}(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$k = 0, 1, \ldots, n$
Poissona	$X \sim \text{Pois}(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	$k \in \mathbb{N}$
Geometryczny	$X \sim \text{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1}p$	$k \in \mathbb{N}$

Wartość oczekiwana zmiennej dyskretnej:

$$E[X] = \mu = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i) \cdot i$$

Wartość oczekiwana jest funcją liniową. Dla zmiennych niezależnych $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Wariancja zmiennej dyskretnej:

$$Var[X] = \sigma^2 = E[X^2] - E^2[X]$$

Zadanie 7.1 *Rozkład geometryczny*
Pokazać, że jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie geometrycznym, to $\min(X, Y)$ też ma rozkład geometryczny.

Zadanie 7.2 *Funkcje zmiennych niezależnych*
Pokazać, że jeśli X i Y są niezależne i $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, to $f(X)$ i $g(Y)$ są niezależne.

Zadanie 7.3 *Wartości oczekiwane*
Policz wartości oczekiwane i wariancje rozkładów geometrycznego i Poissona.

Zadanie 7.4 *Seans*
Na kinowy seans "dla singli" spóźniło się 15 singli: 8 mężczyzn i 7 kobiet. Ponieważ jest już ciemno, a spóźnialscy nie chcą przeszkadzać innym, siadają wszyscy losowo w pierwszym rzędzie, który ma 16 miejsc (czyli o jedno za dużo). Ile będzie średnio par mężczyzna-kobieta siedzących obok siebie?

Zadanie 7.5 *Hazard*
Jan ma przyjaciela, który jest nałogowym hazardzistą i uwielbia grać w ruletkę. Za każdym razem stawia wtedy 10 zł na liczbę 13, i jeśli ta liczba wypada (a jest ona jedną z 38 liczb na kole ruletki), wygrywa z powrotem swoje 10 zł oraz dodatkowe 350 zł, w przeciwnym przypadku traci postawione 10 zł. Jan postanawia wyleczyć go z nałogu. Przed każdą wizytą w kasynie zakłada się z przyjacielem o to, że po 36 obstawieniach będzie na minusie. Stawka zakładu wynosi 200 zł. Jak dobrze działa takie lekarstwo?

Zadanie 7.6 *Koperty*
Gramy w następującą grę: Ktoś rzuca monetą, aż do wypadnięcia pierwszego orła. Powiedzmy, że orzeł wypadł w i-tym rzucie. Następnie do dwóch kopert wkłada odpowiednio 2^i i 2^{i+1} zł. Dostajemy losowo wybraną kopertę i mamy zdecydować, czy chcemy wziąć tę drugą czy nie.

a) Powiedzmy, że otrzymaliśmy kopertę z kwotą 2^i zł. Obliczyć wartość oczekiwaną kwoty w drugiej kopercie i porównać z 2^i.

b) Dlaczego wynik z poprzedniego punktu wydaje się nie mieć sensu?

c) Jak to się stało, że otrzymaliśmy tak absurdalny wynik? Wyjaśnij.

d) Jeśli nie sądzisz, że te wyniki są absurdalne, to spróbuj z 3^i i 3^{i+1} zamiast 2^i i 2^{i+1}.

Zadanie 7.7 *Krupier*
Kasyno oferuje następującą grę: Krupier rzuca monetą do momentu wypadnięcia pierwszego orła. Jeśli pierwszy orzeł wypada w i-tym rzucie, wygrywamy 2^i zł. Ile warto zapłacić za granie w tę grę? Zastanów się nad praktycznym sensem tego wyniku.

Zadanie 7.8 *Grafy losowe*
W n-wierzchołkowym grafie losowym G każda krawędź istnieje z prawdopodobieństwem p niezależnie od pozostałych krawędzi. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby wierzchołków izolowanych. Co dzieje się z tą wartością dla dużych n i $p = \frac{c \ln n}{n}$ w zależności od c ? Co można z tego wywnioskować na temat prawdopodobieństwa znikania / pojawiania się wierzcholków izolowanych w grafie w zależności od c?