Instytut Informatyki
Anna Zych

15. Październik 2014

Rachunek Prawdopodobieństwa Seria 3 Z14

Przydatne tożsamości:

- $e^x \geqslant 1 + x$
- $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$

Prawdopodobieństwo warunkowe:

- $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$
- $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots A_{n-1})$ (wzór iloczynowy)
- $P(H_j|T) = \frac{P(T)P(T|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(T|H_i)}$ gdzie hipotezy $H_1 \ldots H_n$ dzielą przestrzeń Ω (wzór Bayessa)

Zadanie 3.1 *Listy*
n listów włożono losowo do n zaadresowanych kopert (każdy list ma swojego docelowego adresata; wszyscy adresaci są różni). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

a) żaden list nie trafił do właściwej koperty?

b) dokładnie k listów trafiło do właściwych kopert?

Zadanie 3.2 *Monty Hall - baby version*
Gracz w teleturnieju wybiera jedną z 3 zasłon. Za jedną z zasłon jest ukryty samochód, za pozostałymi nic nie ma. Prowadzący odsłania jedną z pozostałych dwóch zasłon i pokazuje, że niczego za nią nie ma, po czym daje graczowi szansę na zmianę wyboru.

a) Czy gracz powinien zmienić swój wybór?

b) Jak zmieni się sytuacja, jeśli zasłon jest 100, a prowadzący odsłania wszystkie poza wskazaną przez gracza i jedną inną?

Zadanie 3.3 *Model urnowy Polyi*
W urnie są dwie kule: biała i czarna. $(n-2)$-krotnie losujemy kulę z urny, po czym wrzucamy ją z powrotem wraz z drugą kulą tego samego koloru. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po zakończeniu losowań wśród n kul dokładnie k jest białych?

Zadanie 3.4 *Szachy*
Grasz w turnieju szachowym, w którym z 50% graczy masz szansę wygrania 30%, z 25% graczy szansę 40% i z 25% graczy szansę 50%.

a) Pierwszą partię rozgrywasz z losowym przeciwnikiem. Jakie sa twoje szanse wygrania?

b) Przypuśćmy, że udało ci sie wygrać pierwsza partię. Jakie jest prawdopodobieństwo, że grałeś z graczem 3-go rodzaju?

Zadanie 3.5 *Znudzeni studenci*
Studenci ziewają na $\frac{1}{4}$ wszystkich wykładów, ale aż na $\frac{3}{4}$ wykładów nudnych.

a) Załóżmy (tylko w tym podpunkcie!) że ciekawych wykładów jest 90%. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wykład wybrany losowo spośród tych, na których studenci nie ziewają, jest ciekawy?

b) Ile może wynosić prawdopodobieństwo, że wykład wybrany losowo spośród tych, na których studenci nie ziewają, jest ciekawy?

Zadanie 3.6 *Monety*
Mamy dane dwie monety: jedna symetryczna, zaś na drugiej zawsze wypada orzeł. Chcemy zidetyfikować monety za pomocą dwóch rzutów. Chcemy znaleźć strategię, która minimalizuje prawdopodobieństwo popełnienia błędu. Rzucamy losową monetą i wyrzucamy orła. Opisz dalszą optymalną strategię, tzn:

a) którą monetą rzucić w drugim rzucie?

b) jakiej odpowiedzi udzielić w zależności od wyniku rzutu?

c) jakie jest prawdopodobieństwo błędu tej strategii?

Zadanie 3.7 *Szklana pogoda*
Każdego dnia deszcz pada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, w przeciwnym przypadku mamy słoneczną pogodę. Telewizyjna prognoza pogody myli się z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, t.j. jeżli prognoza mówi, że pogoda będzie deszczowa, to z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ faktycznie będzie, podobnie, jeśli prognoza mówi, że pogoda będzie słoneczna, to z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ faktycznie będzie. Profesor zawsze zabiera ze sobą parasol, jeśli prognoza zapowiada pogodę deszczową. Jeśli natomiast zapowiadana jest pogoda słoneczna, profesor zabiera parasol z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że telewizyjna prognoza zapowie deszcz.

b) Zakładając, że pada, oblicz prawdopodobieństwo tego, że profesor nie ma ze sobą parasola.

c) Zakładając, że profesor ma ze sobą parasol, oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie pada.