Wokół twierdzenia Helly'ego

Arkadiusz Męcel

Seminarium monograficzne: Wybrane zagadnienia geometrii
29 października oraz 5 listopada 2008r.

Celem tego referatu jest omówienie pewnej klasy twierdzeń dotyczącej zbiorów wypukłych, które można w sposób generalny sformułować przy pomocy następującego stwierdzenia:

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną zbiorów i niech k będzie ustaloną liczbą naturalną. Jeśli każde k zbiorów rodziny $\mathcal{F}$ spełnia własność P, wówczas cała rodzina ma tę własność.

Główny wynik, wokół którego budować będziemy ten referat, jest następujący:

Twierdzenie 1 (Helly, 1913) *Niech $\mathcal{F} = \{B_1, B_2, \ldots, B_r\}$ będzie r – elementową rodziną zbiorów wypukłych w $\mathbb{E}^n$, gdzie $r \geqslant n+1$. Jeśli każda podrodzina $n+1$ zbiorów z $\mathcal{F}$ ma niepuste przecięcie, wówczas:*

$$\bigcap_{i=1}^{r} B_i \neq \emptyset.$$

Jeśli każdy element rodziny $\mathcal{F}$ jest zbiorem domkniętym, a jeden dodatkowo zbiorem ograniczonym, wówczas teza jest prawdziwa także wtedy, gdy $\mathcal{F}$ jest rodziną przeliczalną. Jeśli każdy element rodziny $\mathcal{F}$ jest domknięty i ograniczony, wówczas $\mathcal{F}$ może być dowolnej mocy.

Można podać też następujące uogólnienie:

Twierdzenie 2 *Niech $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_{n+1}$ będą niepustymi i skończonymi rodzinami zbiorów wypukłych w $\mathbb{E}^n$. Jeśli dla dowolnych $A_i \in \mathcal{A}_i$ mamy:*

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i \neq \emptyset,$$

wówczas przecięcie wszystkich zbiorów ze wszystkich tych rodzin jest niepuste.

Zanim zaprezentujemy dowód, spójrzmy na kilka zupełnie elementarnych zastosowań tego faktu.

Przykład 1 *Na płaszczyźnie leży n punktów $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$, gdzie $n \geqslant 3$. Dla każdych trzech z nich istnieje koło o promieniu 1, który je zawiera. Udowodnij, że wszystkie te punkty zawarte są w pewnym kole o promieniu 1.*

Dowód. Niech c_1, c_2, c_3 będą kołami o promieniach równych 1 i środkach w punktach a_1, a_2, a_3. Wówczas zgodnie z założeniem istnieje koło c o promieniu 1 i środku a_0, że $a_1, a_2, a_3 \in c$. Równoważnie: $c_1 \cap c_2 \cap c_3 \neq \emptyset$. Z twierdzenia Helly'ego zastosowanego do rodziny kół $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ o promieniach 1 i środkach w $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ mamy: $c_1 \cap c_2 \cap \ldots \cap c_n \neq 0$. Niech x należy do przecięcia tej rodziny kół. Zgodnie z definicją $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ są odległe od x o co najwyżej 1. Istnieje zatem koło o środku w x i promieniu 1, zawierający je wszystkie. ■

Dowod jest oczywiście prawdziwy gdy zamiast kół o promieniach równych 1 rozważymy koła o promieniach równych pewnemu ustalonemu $r > 0$. Pokażmy pewne ciekawe zastosowanie poprzedniego ćwiczenia.

Przykład 2 *Niech $z_1, z_2, \ldots, z_n$ będą punktami płaszczyzny takimi, że dowolne dwa są odległe od siebie nie więcej niż o 1. Wtedy wszystkie te punkty można pokryć kołem o promieniu $\frac{1}{\sqrt{3}}$.*

Dowód. Zgodnie z przykładem 2., wystarczy pokazać, że każde trzy punkty z rozważanego zbioru można przykryć kołem o promieniu $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dla trzech punktów na płaszczyźnie mamy następujące możliwości położenia:

- Punkty te są wierzchołkami trójkąta ostrokątnego,
- ... prostokątnego,
- ... rozwartokątnego.
- Punkty te są współliniowe.

W trzech ostatnich przypadkach nie ma żadnego problemu. Wystarczy wziąć środek najdłuższego z trzech odcinków powstałych z połączenia rozważanych punktów i umieścić w tym punkcie okrąg o promieniu $\frac{1}{2}$. Pokryje on z pewnością wszystkie punkty. Pozostaje problem trójkąta ostrokątnego. Załóżmy, że rozważamy punkty A, B, C. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABC. Bsog możemy założyć, że kąt ABC jest największym z kątów tego trójkąta (a więc jego miara jest niemniejsza niż 60°. Niech P będzie rzutem O na AC. Wówczas przez α oznaczymy kąt AOP. Mamy:

$$|AP| = \frac{1}{2}|AC| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \alpha = \measuredangle ABC = \measuredangle AOP = \frac{1}{2}\measuredangle AOC \geqslant 60^\circ.$$

Stąd:

$$|AO| = \frac{|AP|}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{2\sin\alpha} \leqslant \frac{1}{2\sin\alpha} \leqslant \frac{1}{2\sin 60^\circ} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

■

Zauważmy, że korzystając z najbardziej generalnej postaci twierdzenia Helly'ego można dwa poprzednie ćwiczenia uogólnić ze skończonego zbioru punktów do dowolnego zbioru punktów płaszczyzny o tej własności, że każde trzy punkty zawarte są w pewnym okręgu (domkniętym) o promieniu r.

Przykład 3 *Na płaszczyźnie leży n prostokątów o bokach równoległych do osi OX i OY: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ o tej własności, że dowolne dwa mają punkt wspólny. Pokaż, ze wszystkie prostokąty mają punkt wspólny.*

Dowód. Zrzutujmy te prostokąty na osie układu współrzędnych. Obraz każdego prostokąta po zrzutowaniu na dowolną z osi jest odcinkiem. Niech f, g będą tymi rzutowaniami. Wówczas dla dowolnych dwóch prostokątów P_1, P_2 rozważanej rodziny mamy: $f(P_1) \cap f(P_2) \neq \emptyset$. Podobnie dla g. Stosując na osi OX twierdzenie Helly'ego do rodziny $f(P_i)$ dostajemy, że istnieje $x \in OX$, że $x \in \bigcap f(P_i)$. Podobnie na osi OY istnieje punkt $y \in OY$, który zawiera się w przecięciu $g(P_i)$. Zatem punkt (x, y) należy do przecięcia wszystkich tych prostokątów. ■

Przykład 4 *Na płaszczyźnie położona jest dowolna skończona rodzina wielokątów $\mathcal{F}$ (niekoniecznie wypukłych) o tej własności, że dowolne dwa wielokąty mają punkt wspólny. Pokaż, że dla dowolnego punktu na płaszczyźnie istnieje okrąg o środku w tym punkcie mający punkt wspólny z każdym elementem rozważanej rodziny wielomianów.*

Niech $a \in \mathbb{R}^2$ oraz l – dowolna prosta o początku w a. Niech x będzie dowolnym punktem rodziny $\mathcal{F}$. Niech jego odległość od a wynosi d^*. Niech $f(x) \in l$ będzie takim punktem płaszczyzny, że $d(a, f(x)) = d^*$. Rozważmy rodzinę $\{f(F_n)\}$, gdzie $F_n \in \mathcal{F}$. Zauważmy, że każdy element $\{f(F_n)\}$ leży w l i jest tam zbiorem wypukłym. Aby to pokazać, zauważmy, że każdy element rodziny $\mathcal{F}$ jest spójnym i zwartym, a więc (w $\mathbb{E}^n$) łukowo spójnym i zwartym. Niech x_F, y_F będą punktami zbioru F, które są najbliżej i najdalej od punktu a. Skoro F jest zwarty, to takie istnieją. Ze spójności, istnieje taki łuk $x_F y_F$, który łączy te dwa punkty i odległości elementów którego od punktu a pokrywają się z całym zbiorem odległości elementów zbioru F od a. Zatem skoro $f(x_F y_F)$ jest spójny na l, to obraz ten jest wypukły. Dla dowolnych i, j mamy: $f(F_i) \cap f(F_j) \neq \emptyset$. Zatem z twierdzenia Helly'ego zastosowanego w l dla rodziny $\{f(F_i)\}$ mamy:

$$\bigcap \{f(F_i)\} \neq \emptyset.$$

Niech p należy do tego przecięcia. Wówczas okrąg o środku w punkcie a i promieniu p przecina wszystkie elementy rodziny $\mathcal{F}$.

Widzimy zatem, że można układać całkiem nietrywialne zadania związane z twierdzeniem Helly'ego (zarówno w skończonej, jak i nieskończonej wersji). Zanim udowodnimy to twierdzenie potrzebujemy pewnego lematu, istotnego samego w sobie:

Lemat 1 (Radon) *Niech $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ będzie zbiorem punktów przestrzeni $\mathbb{E}^n$, gdzie $r \geqslant n + 2$. Wówczas można S podzielić na dwa niepuste i rozłączne podzbiory S_1, S_2 o tej własności, że:*

$$conv(S_1) \cap conv(S_2) \neq \emptyset.$$

Dowód. Z twierdzenia Caratheodory'ego wnosimy, że elementy S są aficznie zależne. Oznacza to, że istnieją skalary $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, nie wszystkie równe zero, takie, że:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0.$$

Oznacza to, że pewien podzbiór zbioru $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ zawiera jedynie liczby nieujemne (w tym co najmniej jedną dodatnią). Niech będą to $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k\}$. Skoro suma wszystkich alf wynosi 0, to:

$$\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k) = -(\alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_r).$$

Skoro $\alpha > 0$, to możemy przyjąć:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i = \sum_{k+1}^{r} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha}\right) x_i.$$

Pierwsza suma jest kombinacją afiniczą punktów $x_1, x_2, \ldots, x_k$, druga zaś pozostałych. Zatem x należy zarówno do $\mathrm{conv}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ jak i do $\mathrm{conv}(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_r)$. Przyjmując zatem $S_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $S_2 = S \setminus S_1$ dostajemy tezę. ∎

Można udowodnić także odwrotną wersję tego lematu: jeśli S jest dowolnym skończonym podzbiorem $\mathbb{E}^n$, afinicznie niezależnym, wówczas dla każdego podziału S na dwa niepuste i rozłączne podzbiory S_1, S_2 mamy $\mathrm{conv}S_1 \cap \mathrm{conv}S_2$. Dowodzi się go analogicznie. Ważnym uogólnieniem tego wyniku jest:

Twierdzenie 3 (Tverberg, 1966) *W przestrzeni $\mathbb{E}^n$ dany jest zbiór S złożony z $(r-1)(n+1)+1$ punktów. Wówczas istnieją rozłączne $S_1, S_2, \ldots S_r$, parami rozłączne, że:*

$$\bigcap_{i=1}^{k} conv(S_i) \neq \emptyset.$$

Warto też wspomnieć w tym miejscu o tzw. pokolorowanej wersji twierdzenia Tveberga:

Twierdzenie 4 (Kolorowy Tveberg, Barany, 1990) *Na płaszczyźnie dane są 3 zbiory punktów: N, Z, C, każdy mocy n. Przez N określamy puntky niebieskie, przez Z - punkty zielone, C - punkty czerwone. Wówczas istnieje n trójkątów $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ o wierzchołkach pochodzących ze zbiorów N, Z, C spełniających następujące warunki:*

- *Wierzchołki każdego z trójkątów są w różnych kolorach.*
- $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap \ldots \cap T_n \neq \emptyset$.

Przystąpmy do zasadniczego dowodu tw. Helly'ego. Niech najpierw $\mathcal{F} = \{B_1, B_2, \ldots B_r\}$. Wówczas udowodnimy zasadniczą część tw. Helly'ego indukcyjnie. Dla $r = n+1$ teza jest oczywista. Załóżmy teraz, że moc rozważanej rodziny to $r > n+1$. Zgodnie z założeniem indukcyjnym, istnieją takie punkty $x_1, x_2, \ldots, x_r$, że:

$$x_i \in B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap B_{i+1} \cap \ldots B_r.$$

Skoro $r \geqslant n+2$ możemy zaaplikować do tego zbioru punktów (nazwijmy go S) lemat Radona i stwierdzić bsog, ze istnieje $S_1 = \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$, że $\mathrm{conv} S_1 \cap \mathrm{conv}(S \setminus S_1) \neq \emptyset$. Niech więc:

$$x \in \mathrm{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \cap \mathrm{conv}\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_r\}.$$

Wówczas twierdzimy, że x jest w przecięciu wszystkich B_i (a to byłaby już teza). Istotnie, $x \in \mathrm{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, a więc na mocy wypukłości zbiorów B_i mamy: $x \in B_{k+1} \cap B_{k_2} \cap \ldots \cap B_r$. Podobnie w drugą stronę: $x \in \mathrm{conv}\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_r\}$, a więc $x \in B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1}$. Ostatecznie x leży w przecięciu wszystkich B_i.

Podamy teraz dowód w przypadku przeliczalnym i nieprzeliczalnym.

Załóżmy na początek, że mamy przeliczalną rodzinę $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ zbiorów wypukłych i domkniętych, wśród których F_1 jest dodatkowo ograniczony. Niech:

$$C_i = \bigcap_{k=1}^{i} F_i.$$

Każdy z tych zbiorów jest, jako przecięcie zbiorów wypukłych, wypukły. Ze skończonej wersji twierdzenia Helly'ego jest on także niepusty. Korzystając z faktu, że przecięcie zbiorów domkniętych jest domknięte oraz z tego, że przecięcie zbioru zwartego z domkniętym jest zwarte (topologia 1) widzimy, że C_i są zwarte. Teza twierdzenia jest zatem równoważna stwierdzeniu, że przecięcie C_i jest niepuste. Załóżmy, że jest ono puste. Zatem istnieje takie n, że:

$$C_n \cap \left(\bigcap_{i=1, i \neq n}^{\infty} C_i \right) = \emptyset.$$

Oznacza to, że C_n leży w sumie dopełnień zbiorów C_i, dla $i \neq n$. Są to zbiory otwarte i tworzą otwarte pokrycie C_n. Skoro jest to zbiór zwarty, to z pokrycia tego można wybrać podpokrycie skończone. Oznacza to, że istnieją $i_1, i_2, \ldots, i_k$, dla których

$$C_n \subset C_{i_1}^c \cup C_{i_2}^c \cup \ldots \cup C_{i_k}^c.$$

Równoważnie:

$$C_n \cap C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \ldots \cap C_{i_k} = \emptyset.$$

Zauważmy jednak, że przecięcie pewnej skończonej liczby zbiorów postaci C_i jest w istocie skończonym przecięciem zbiorów F_i, a te jest (na mocy Tw. Helly'ego) niepuste.

Zupełnie analogicznie postępujemy w przypadku dowolnej rodziny zbiorów zwartych i wypukłych $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$. Wiemy, że każda skończona podrodzina $\mathcal{F}$ ma niepuste przecięcie (tw. Helly'ego). Załóżmy, że pewien $F_\alpha \in \mathcal{F}$ ma puste przecięcie z $\bigcap_{i \in I \setminus \{\alpha\}} F_i$. Oznacza to, że leży on w sumie dopełnień zbiorów F_i, a więc w sumie pewnych zbiorów otwartych, stanowiących pokrycie F_α. Jest to zbiór zwarty, więc możemy wybrać otwarte podpokrycie skończone tego zbioru. Zatem dla pewnych indeksów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ mamy:

$$F_\alpha \subset F_{\alpha_1}^c \cup F_{\alpha_2}^c \cup \ldots \cup F_{\alpha_k}^c.$$

Równoważnie:

$$F_\alpha \cap F_{\alpha_1}^c \cap F_{\alpha_2}^c \cap \ldots \cap F_{\alpha_k}^c = \emptyset.$$

To jest jednak sprzeczność z faktem, że dowolna skończona podrodzina zbiorów z $\mathcal{F}$ ma niepuste przecięcie. To kończy dowód.

Łatwo pokazać, że założeń tw. Helly'ego nie da się w żadnym przypadku istotnie poprawić. Nie można oczywiście opuścić założenia wypukłości (prosty kontprzykład). Nie jest też możliwe obniżenie założenia, że przecinać się (w $\mathbb{E}^n$) musi każda podrodzina $n+1$ zbiorów. Inaczej bowiem boki dowolnego trójkąta (a w dowolnym wymiarze: jednowymiarowe krawędzie sympleksu) stanowią kontrprzykład do tego twierdzenia. Także kwestie domkniętości i zwartości grają kluczową rolę w przypadkach nieskończonych rodzin zbiorów wypukłych. Gdybyśmy na przykład wzięli przeliczalną rodzinę wypukłych, domkniętych i nieograniczonych na płaszczyźnie, takich, że dowolne 3 mają niepuste przecięcie, wówczas tw. Helly'ego nie zachodzi w tej rodzinie. Przykładem jest rodzina postaci:

$$P_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant n\}.$$

Także przeliczalna rodzina zbiorów wypukłych i ograniczonych nie wystarczy. Istotnie, wystarczy rozważyć rodzinę kół otwartych postaci:

$$K_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{n^2} \right\}.$$

Można zadać sobie pytanie o wielkość zbiorów będących przecięciami rodzin zbiorów wypukłych. Fundamentalny wynik w tej materii stanowi twierdzenie:

Twierdzenie 5 (Wielowymiarowe twierdzenie Helly'ego) *Niech $\mathcal{F}$ będzie skończoną i co najmniej $n+1$ elementową rodziną zbiorów wypukłych w $\mathbb{E}^n$. Wówczas, jeśli każde $n+1-d$ zbiorów z tej rodziny zawiera pewną podprzestrzeń afiniczną wymiaru d, wówczas także przecięcie wszystkich zbiorów z tej rodziny zawiera pewną poprzestrzeń afiniczą wymiaru d.*

Poniżej zamieszczamy kilka ciekawych wyników związanych z rozmiarem przecięcia zbiorów wypukłych. Pierwszy z nich dowodzimy:

Twierdzenie 6 (Klee, 1953) *Niech $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ będzie rodziną zwartych zbiorów wypukłych w $\mathbb{E}^n$ zawierającą przynajmniej $n+1$ elementów. Załóżmy, że istnieje podzbiór zwarty $K \in \mathbb{E}^n$, że dla każdej rodziny $n+1$ zbiorów z $\mathcal{A}$ istnieje przesunięcie zbioru K leżące w przecięciu tych $n+1$ zbiorów z $\mathcal{A}$. Wówczas istnieje przesunięcie K, leżące w przecięciu wszystkich elementów rodziny $\mathcal{A}$.*

Dowód. Dla każdego $i \in I$ niech $A_i^* = \{p : (p + K) \subset A_i\}$. Twierdzimy, że A_i^* są wypukłe dla każdego $i \in I$. Musimy pokazać, że jeśli x, y są elementami A_i^* to istnieje $\gamma \in [0, 1]$, że:

$$[\gamma x + (1 - \gamma)y] + K \subset A_i.$$

Ale dla każdego $k \in K$ mamy:

$$[\gamma x + (1 - \gamma)y] + k = [\gamma x + (1 - \gamma)y] + \gamma k + (1 - \gamma)k = \gamma(x + k) + (1 - \gamma)(y + k).$$

Oczywiście $x + k$ oraz $y + k$ należą do A_i zatem z wypukłości A_i mamy wypukłość A_i^*.

Zauważmy także, że A_i^* jest zwarty. Istotnie, zbiór $A_i^* + K$ leży w A_i jest więc ograniczony. Stąd także A_i^* jest ograniczony. Pokażmy jeszcze, że A_i^* jest domknięty. Rozważmy: $\overline{A_i^*} + K$. Każdy jego element należy do A_i. Istotnie, gdyby istniał taki ciąg $a_n \in A_i^*$, że $a_n \to a$, to $a \in \overline{A_i^*}$. Ale ciąg $a_n + K$ zawarty jest także w A_i, zatem ze zwartości A_i mamy $a + K \in A_i$ (A_i zawiera, ze zwartości wszystkie granice ciągów $a_n + k$, $k \in K$, a więc także $a + K$). Stąd jednak $a \in A_i^*$, co kończy dowód domkniętości.

Na podstawie hipotezy, każde $n + 1$ zbiorów A_i^* ma niepuste przecięcie (bo istnieje przesunięcie K wpadające do $n + 1$ elementów rodziny $\mathcal{A}$). Zatem z twierdzenia Helly'ego (wersja dla zbiorów zwartych) istnieje q w przecięciu wszystkich A_i^*. Ale oznacza to, że $q + K$ leży w każdym elemencie rodziny A_i. ■

Istnieje analog tego twierdzenia (także z pracy Klee), że jeśli w $\mathbb{E}^n$ dana jest dowolna rodzina zbiorów zwartych $\mathcal{F}$, oraz zbiór zwarty K o tej własności, że dla każdej podrodziny $n + 1$ zbiorów z $\mathcal{F}$ istnieje przesunięcie K zawierające sumę zbiorów z tej podrodziny, wówczas istnieje przesunięcie K zawierające sumę wszystkich zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$.

Podamy bez dowodu kilka innych faktów dotyczących rozmiarów zbiorów w przecięciach:

Twierdzenie 7 (1982) *Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolną skończoną rodziną zbiorów domkniętych i wypukłych w $\mathbb{E}^n$ o mocy równej co najmniej $n + 1$. Jeśli przecięcie dowolnych $n + 1$ zbiorów z tej rodziny ma szerokość co najmniej w (a więc najmniejszą odległość między podpierającymi hiperpłaszczyznami), wówczas także przecięcie wszystkich zbiorów z tej rodziny ma szerokość co najmniej w.*

Dwa kolejne wyniki pochodzą z pracy Barany'ego, Katchalskiego i Pacha, '*Helly's theorem with volumes*' (1984):

Twierdzenie 8 *Niech $\mathcal{A}$ będzie skonczoną rodziną przynajmniej $2n$ zbiorów wypukłych w przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Jeśli przecięcie każdych $2d$ zbiorów z tej rodziny ma:*

- *średnicę równą przynajmniej 1,*
- *objętość równą przynajmniej 1,*

wówczas przecięcie wszystkich elementów rodziny $\mathcal{A}$ ma:

- *średnicę równą przynajmniej $n^{-2n}/2$,*
- *objętość równą przynajmniej n^{-2n^2},*

Stałej $2d$ nie można poprawić. Jest hipoteza otwarta, że stałych z tezy zadania nie można poprawić z dokładnością do stałych.

Można pytać także o to, jakie ciekawe twierdzenia otrzymamy, gdy założymy, że w rodzinie $\mathcal{F}$ (czy to skończonej złożonej ze zbiorów wypukłych, czy to nieskończonej złożonej ze zbiorów zwartych) zbiorów należących do $\mathbb{E}^n$ niepuste przecięcie ma dowolna podrodzina złożona z mniej niż $n+1$ zbiorów? Odpowiedzi na te pytania podał Horn w 1949. Zaprezentujemy je tu bez dowodu:

Przykład 5 (Horn, 1949) *Niech $\mathcal{F} = \{B_1, B_2, \ldots, B_r\}$ będzie rodziną r zwartych i wypukłych podzbiorów $\mathbb{E}^n$, gdzie $r \geqslant n$. Jeżeli każda podrodzina $\mathcal{F}$ złożona z n zbiorów ma niepuste przecięcie, to z każdego punktu $\mathbb{E}^n$ można poprowadzić prostą przecinającą wszystkie elementy $\mathcal{F}$.*

Ogólniej, jeśli $\mathcal{F}$ jest dowolną rodziną zwartych i wypukłych podzbiorów $\mathbb{E}^n$ zawierającą przynajmniej n zbiorów taką, że dowolna podrodzina k zbiorów z $\mathcal{F}$ ma niepuste przecięcie ($1 \leqslant k \leqslant n$), wówczas biorąc dowolną $(n-k)$ – wymiarową podprzestrzeń afiniczą F_1 istnieje $(n-k+1)$ – wymiarowa podprzestrzeń F_2, że $F_2 \supset F_1$ oraz F_2 przecina wszystkie elementy $\mathcal{F}$

Na koniec przytoczymy kilka wyników związanych ze zbiorami gwiaździstymi. Pokażemy zastosowanie twierdzenia Helly'ego w twierdzeniu Krasnosielskiego. Pozwala ono stwierdzić kiedy zbiór zwarty S jest gwiaździsty. Przypomnijmy, że oznacza to, że isnieje punkt $k \in S$, z którego widać wszystkie inne punkty K, tj. taki, że dla każdego $s \in S$ mamy zawieranie: $\overline{ks} \subset S$.

Twierdzenie 9 (Krasnosielski, 1946) *Niech S będzie zbiorem zwartym w $\mathbb{E}^n$ zawierajacym co najmniej $n+1$ punktów. Załóżmy, że dla każdych $n+1$ punktów S istnieje taki punkt S, z którego widać wszystkie te $n+1$ punktów. Wówczas zbiór S jest gwiaździsty.*

Dowód. Dla każdego $x \in S$ niech $V_x = \{y : \overline{xy} \subset S\}$. Hipoteza oznacza, że każde $n+1$ zbiorów postaci V_x ma niepuste przecięcie. Mamy z tego wydedukować, że wszystkie te zbiory mają niepuste przecięcie. Z twierdzenia Helly'ego wiemy, że istnieje punkt należący do $\bigcap_{x\in S} \operatorname{conv}(V_x)$. Chcemy pokazać, że $y \in \bigcap_{x\in S} V_x$. Załóżmy przeciwnie, że y nie należy do tego przecięcia. Zatem istnieje taki $x \in S$ oraz taki $u \in \overline{xy}$, że $u \notin S$. Niech x' należy do przecięcia brzegu S z $\overline{xy}$. Skoro S jest zwarty, to istnieje taki punkt $w \in \overline{x'u}$, że:

$$d(w, x') = \frac{1}{2} d(u, S).$$

Co więcej, istnieją punkty $v \in \overline{wu}$ oraz $z \in S$, że:

$$d(v, z) = d(\overline{wu}, S).$$

Skoro z jest punktem S najbliższym do v, wynika stąd, że V_z leży w domkniętej półprzestrzeni P, która omija v i jest ograniczona przez hiperpłaszczyznę H przechodzącą przez z i prostopadłą do $\overline{vz}$. Ale skoro $y \in \operatorname{conv} V_z \subset P$ oraz $\measuredangle yzv \geqslant \frac{\pi}{2}$ to $\measuredangle zvy < \frac{\pi}{2}$. Co więcej, skoro $d(v, S) \leqslant d(w, S) < d(u, S)$, stąd $v \neq u$. Stąd pewien punkt $\overline{vu}$ jest bliżej z niż v. Otrzymana sprzeczność z wyborem v kończy dowód. ■

Warto zwrócić uwagę na fakt, że istnieją pewne topologiczne uogólnienia Tw. Helly'ego, które pozwalają udowodnić je dla dowolnej rodziny zwartych zbiorów gwiaździstych (tak naprawdę to dla tzw. komórek homologicznych, ale Autor nie wie co oznacza to pojęcie). Na sam koniec jeden z wielu problemów otwartych w tej dziedzinie:

Hipoteza otwarta 1 *Niech $\mathcal{F}$ będzie skończoną rodziną przesunięć pewnego zbioru wypukłego w $\mathbb{R}^2$. Udowonij, lub zaprzecz stwierdzeniu, że jeśli dowolne dwa z tych przesunięć mają punkt wspólny, to istnieje taki zbiór trzypunktowy, który przecina wszystkie elementy rodziny $\mathcal{F}$.*

Literatura

[1] BARANY I., LARMAN D.G.: *A coloured version of Tverberg's theorem*, Cowles Foundation for research in economics at Yale University, Yale (1990).

[2] Rozdział 3. podręcznika, na którym się opieramy (nie pamiętam Autora).

[3] LEANDER M.: *Hellys Type Theorems*, Stockholms Universitet, Szwecja (2008).

[4] PAK I.: *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*, dostępna online:

http://www.math.umn.edu/ pak/geompol8.pdf (2008).

[5] WENGER R.: *Helly - type theorems and geometric transversals*, Handbook of Discrete and Computational Geometry, CRC Press (2004).