5. Ciało liczb zespolonych – wprowadzenie

Zadanie domowe 1. *Wykaż, że w każdym ciele K równośc $x + y = x + z$, dla pewnych $x, y, z \in K$, implikuje $y = z$.*

Zadanie domowe 2. *Wykaż, że w ciele o czterech elementach $\{0, 1, a, b\}$ mamy równość $a + 1 = b$.*

Zadanie 1. *Oblicz:*

a) $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$,

b) $\frac{5+i)(7-6i)}{3+i}$,

c) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

Zadanie 2. *Znajdź liczby rzeczywiste x, y, dla których:*

a) $(5 - 8i)x + (7 + 3i)y = 2 - i$,

b) $(7 + 2i)x - (5 - 4i)y = -1 - i$.

Zadanie 3. *Znajdź wszystkie liczby zespolone z, które są rozwiązaniami równań (opisz częśc rzeczywistą i urojoną rozwiązań):*

a) $z^2 = i$,

b) $(1 + i)z^2 + (3 - 5i)z - 6 = 0$,

c) $2z + 3\overline{z} - Re(z) + 2Im(z) = 8 - 3i$,

d) $|z| + 3\overline{z} = 2 + 6i$.

Zadanie 4. *Pokaż, że dla dowolnej liczby zespolonej z:*

a) $Im(z) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $z = \overline{z}$,

b) $Re(z) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\overline{z} = -z$,

c) $|z| = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $z\overline{z} = 1$.

Zadanie 5. *Wyznacz wszystkie liczby zespolone $z \neq 0$, dla których $z + 1/z \in \mathbb{R}$.*

Zadanie 6. *Liczby zespolone z_1, z_2 spełniają równość $|z| = 1$. Pokaż, że liczba $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ jest rzeczywista.*

Zadanie 7. *Wykaż, że wszystkie niezerowe rozwiązania z_0 równania $(1 + z)^n = (1 - z)^n$, gdzie $z \in \mathbb{C}$ spełniają $Re(z_0) = 0$.*

Zadanie 8. *Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań liniowych o współczynnikach zespolonych:*

$$\begin{cases} (1-i)x_1 + ix_2 + 2x_3 - ix_4 & = 1 + i \\ (1+i)x_1 + x_2 + 2ix_3 + (1+2i)x_4 & = 1 - i \\ ix_1 + (-1+i)x_3 + ix_4 & = 0 \end{cases}$$