Jądro i obraz przekształcenia. Przestrzenie izomorficzne.

`Jądro i obraz przekształcenia liniowego, rząd przekształcenia, monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm, przekształcenie odwrotne, przestrzenie izomorficzne, przestrzeń ilorazowa.`

Na poprzednim wykładzie zdefiniowaliśmy przekształcenia liniowe. Pokazaliśmy, w szczególności, jaka jest ich postać ogólna dla przestrzeni współrzędnych (czyli dla przekształceń liniowych $f : K^n \to K^m$). Dziś naszym celem jest pokazanie, że w istocie wszystkie przekształcenia liniowe pomiędzy przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru są tej postaci, bo każda skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa ma strukturę identyczną do struktury przestrzeni współrzędnych. Co to dokładnie znaczy – o tym dzisiaj.

Definicja 1. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.*

- ***Jądrem*** *przekstałcenia ϕ nazywamy zbiór*

$$\ker(\phi) = \{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = 0\} \subseteq V.$$

- ***Obrazem*** *przekształcenia ϕ nazywamy zbiór:*

$$\mathrm{im}(\phi) = \{\phi(\alpha) \mid \alpha \in V\} \subseteq W.$$

Z definicji przekształcenia liniowego wynika natychmiast, że jądro i obraz przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ są odpowiednio podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V oraz W. Kilka przykładów:

- Niech $\phi : V \to V$ będzie homotetią, przy czym $\phi(v) = av$, dla każdego $v \in V$ oraz pewnego ustalonego $a \in K$. Wówczas:

$$\ker(\phi) = \begin{cases} \{0\}, & s \neq 0 \\ V, & s = 0 \end{cases}, \quad \mathrm{im}(\phi) = \begin{cases} V & , s \neq 0 \\ \{0\} & , s = 0 \end{cases}.$$

- Niech $\phi : V \to V$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2. Wówczas:

$$\ker(\phi) = V_2, \quad \mathrm{im}(\phi) = V_1.$$

- Niech $\phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ będzie pochodną. Wówczas:

$$\ker(\phi) = \{w \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(w) = 0\}, \quad \mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}[x].$$

- Niech $\phi : K^n \to K^m$ będzie przekształceniem liniowym postaci:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \ldots , a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n).$$

  Wówczas $\ker(f)$ jest zbiorem rozwiązań jednorodnego układu równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}.$$

  Zauważmy też, że w tym przypadku $\mathrm{im}(f)$ jest przestrzenią kolumnową macierzy współczynników powyższego układu, a więc jej wymiar równy jest rzędowi tej macierzy. A zatem dla przekszałceń liniowych tej postaci mamy:

$$\dim K^n = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{im}(f).$$

  Okaże się za chwilę, że podobne związki zachodzą pomiędzy dowolnymi przekształceniami liniowymi przestrzeni skończonego wymiaru. A jeszcze później okaże się, że to nic dziwnego, bo każde przekształcenie jest „w istocie” jednym z powyższych.

Naszym celem jest „opisanie” wszystkich przekształceń liniowych przestrzeni skończonego wymiaru, a jednym z narzędzi mają być jądro i wymiar. Powiemy na początku o tym jak opisy tych podprzestrzeni związane są z przestrzeniami, między którymi działają. Zacznijmy od następującej prostej uwagi

$$V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}(\phi(\alpha), \ldots, \phi(\alpha_n)).$$

Jest jasne, że choć układy rozpinające V oraz $\mathrm{im}(V)$ mogą być równoliczne, to wymiary tych przestrzeni – niekoniecznie są równe! Wymiar przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$ nazywamy `rzędem przekształcenia`, ozn. $r(\phi)$. Czy umiemy wyznaczyć bazę obrazu przekształcenia ϕ i w konsekwencji jego wymiar? Z pomocą przychodzi następująca obserwacja, będąca uogólnieniem omówionej wyżej sytuacji.

Uwaga 1. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech U będzie taką podprzestrzenią przestrzeni V, że $V = \ker(\phi) \oplus U$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni U. Wówczas układ $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$.*

Wniosek 1. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:*

$$\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \mathrm{im}(\phi).$$

Dowód. Dowodzimy najpierw Uwagę. Pokażemy, że dla każdego dopełnienia prostego przestrzeni $\ker(\phi)$ i każdej jego bazy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ zbiór wektorów $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ rozpina przestrzeń $\mathrm{im}(\phi)$. Następnie pokażemy, że układ ten jest liniowo niezależny.

Niech $\beta \in \mathrm{im}(\phi)$. Chcemy pokazać, że $\beta \in \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k))$. Wiadomo, że $\beta = \phi(\alpha) = \phi(\alpha' + \alpha'')$, gdzie $\alpha' \in \ker(\phi)$oraz $\alpha'' \in U$. A zatem $\alpha'' = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$. Zatem:

$$\beta = \phi(\alpha) = \phi(\alpha' + \alpha'') = \phi(\alpha') + \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = 0 + a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\alpha_k \in \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)).$$

Dowodzimy liniowej niezależności tego układu. Przypuśćmy, że $a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) = 0$. Wówczas $\phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = 0$, a zatem $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi)$. Ale przecież $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U. A zatem $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi) \cap U = \{0\}$. A szczególności $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, czyli $a_1 = \ldots = a_k = 0$, bo $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U. Układ $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ jest zatem liniowo niezależny.

Dowód wniosku jest teraz natychmiastowy. Na mocy twierdzenia o wymiarze sumy prostej mamy:

$$\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim U = \dim \ker(\phi) + k = \dim \ker(\phi) + \dim \mathrm{im}(\phi).$$

□

Rezultat nasz ma sens również w przypadku, gdy V jest przestrzenią nieskończonego wymiaru. Dowód wymaga pewnej modyfikacji, ale w rezultacie okazuje sie, że jesli $\phi : V \to W$ jest liniowe i $\dim V = \infty$, to wymiary przestrzeni $\ker(\phi)$ oraz $\mathrm{im}(\phi)$ nie mogą być jednocześnie skończenie wymiarowe.

Ważne klasy przekształceń liniowych pochodzą od sytuacji, gdy w formule $\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \mathrm{im}(\phi)$ pierwszy ze składników ma wymiar 0, lub drugi ma wymiar $\dim V$.

Definicja 2. *Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ nazywamy:*

- `monomorfizmem`*, gdy ϕ jest różnowartościowe, tzn. $\phi(\alpha) = \phi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$, dla każdych $\alpha, \beta \in V$,*
- `epimorfizmem`*, gdy ϕ jest „na”, to znaczy gdy dla każdego $\gamma \in W$ istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\phi(\alpha) = \gamma$.*
- `izomorfizmem`*, gdy ϕ jest różnowartościowe i „na” (to znaczy, gdy ϕ jest bijekcją).*

Wprowadzone nazewnictwo odnosi się bezpośrednio do pojęć: iniekcji, suriekcji i bijekcji stosowanych wobec funkcji. W naszym przypadku nie używamy tych pojęć, ponieważ poza teoriomnogościowymi własnościami funkcji, korzystać będziemy także z ich własności jako przekształceń liniowych. Dla przykładu, zbiory $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}$ są równoliczne, ale $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}$ jako przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$ nie są izomorficzne.

Uwaga 2. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:*

- *ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,*
- *ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.*

Dowód. Udowodnimy tylko pierwszą równoważność. Jeśli ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$, to skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ wynika, że $\alpha = 0$. A zatem $\ker(\phi) = 0$. Na odwrót: jeśli $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz dla pewnych $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, to z liniowości $\phi(\alpha - \beta) = 0$. Skoro $\ker(\phi) = \{0\}$, to $\alpha - \beta = 0$, czyli $\alpha = \beta$. W szczególności ϕ to monomorfizm. □

Wniosek 2. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym oraz $\dim V, \dim W < \infty$. Wówczas:*

- *jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leqslant \dim W$,*
- *jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leqslant \dim V$,*
- *jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.*

Co ważne, tezę punktu trzeciego można dla przestrzeni skończenie wymiarowych łatwo odwrócić.

Wniosek 3. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\dim V = \dim W < \infty$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(a) ϕ jest monomorfizmem,

(b) ϕ jest epimorfizmem,

(c) ϕ jest izomorfizmem.

Dowód. Z równości $\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi)$ i z warunków wniosku wynika ciąg równoważności:

$$\ker(\phi) \overset{(a)}{=} \{0\} \Leftrightarrow \dim \ker(\phi) = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{im}(\phi) = \dim V \Leftrightarrow \dim \operatorname{im}(\phi) = \dim W \Leftrightarrow \operatorname{im}(\phi) \overset{(b)}{=} W.$$

□

Definicja 3. *Mówimy, że przestrzenie V i W nad ciałem K są* `izomorficzne`*, jeśli istnieje izomorfizm $\phi : V \to W$. Oznaczenie: $V \simeq W$.*

To właśnie izomorfizm przestrzeni liniowych jest pojęciem, które mówi o tym, że jakieś dwie przestrzenie są „jednakowe” z punktu widzenia algebry liniowej, czyli mają tą samą strukturę. Co to znaczy jednakowe? Przytoczymy teraz kilka rezultatów, które o tym mówią.

Twierdzenie 1. *Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:*

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Dowód. Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$. Ogólny przypadek dowodu przeprowadza się analogicznie, ale notacja jest bardziej uciążliwa (podwójne indeksy).

Wiemy już, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ i każdej podprzestrzeni U w W takiej, że $V = \ker(\phi) \oplus U$ przekształcenie ϕ przeprowadza bazę przestrzeni U na bazę przestrzeni $\operatorname{im}(\phi)$. Jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\operatorname{im}(\phi) = W$, a także $\ker(\phi) = \{0\}$, więc $V = U$. Zatem ϕ przeprowadza bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W. Pokazaliśmy $(i) \Rightarrow (ii)$.

Implikacja $(ii) \Rightarrow (iii)$ jest oczywista.

Przypuśćmy, że pewne przekształcenie liniowe ϕ przeprowadza bazę $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V na bazę $\beta_1, \ldots, \beta_n$ przestrzeni W. Pokażemy, że ϕ jest izomorfizmem czyli, że $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz $\operatorname{im}(\phi) = V$.

Jeśli $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \in \ker(\phi)$, to $0 = \phi(\alpha) = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$, co wobec liniowej niezależności układu $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ oznacza, że $a_1 = \ldots = a_n = 0$. A zatem $\alpha = 0$. A zatem wobec dowolności wyboru α mamy $\ker(\phi) = \{0\}$.

Weźmy $\beta \in W$ i niech $\beta = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$. Wówczas $\beta = \phi(\alpha)$, dla pewnego $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$. A zatem z dowolności wyboru β mamy $W = \operatorname{im}(\phi)$. □

Rezultat ten pozwala nam udowodnić kluczowy wniosek.

Wniosek 4. *Niech V, W będą przestrzeniami skończonego wymiaru nad ciałem K. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $V \simeq W$,

(ii) $\dim V = \dim W$,

(iii) $V \simeq K^{\dim V}$.

Dowód. Implikacja *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* została pokazana już wcześniej w oparciu o formułę $\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi)$, gdzie $\phi : V \to W$ jest izomorfizmem. Implikacja *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* wynika natychmiast z twierdzenia powyżej. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą V oraz niech $\beta_1, \ldots, \beta_n$ będzie bazą W. Definiujemy $\phi(V)$ warunkiem $\phi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Wiadomo, że takie przekształcenie istnieje dla każdego układu wektorów W równolicznego z bazą $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Takie przekształcenie ϕ, które wybraliśmy, musi być jednak izomorfizmem, bo przeprowadza bazę V na bazę W. Pozostałe implikacje są oczywiste. $\square$

Dodajmy, że istnieje wiele izomorfizmów pomiędzy skończenie wymiarowymi przestrzeniami tego samego wymiaru. W szczególności, jeśli $\dim V = n$ wówczas dla każdej bazy $\mathcal{A}$ funkcja $\phi_{\mathcal{A}}$ przypisująca wektorowi α wektor $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ taki, że $a_1, \ldots, a_n$ są (wyznaczonymi jednoznacznie!) współrzędnymi α w bazie $\mathcal{A}$, to $\phi_{\mathcal{A}}$ jest izomorfizmem. Dokładniej, dla skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V istnieje bijekcja między zbiorem izomorfizmów $V \to K^{\dim(V)}$ oraz zbiorem baz przestrzeni V.

W przypadku przestrzeni nieskończonego wymiaru trudno o analogiczne obserwacje. Po pierwsze nie każde dwie przestrzenie nieskończonego wymiaru są izomorficzne. Podstawowych argumentów dostarcza tu teoria mnogości. Co więcej, w przypadku przestrzeni nieskończonego wymiaru zachodzi fenomenów. Można pokazać, używając między innymi powyższych obserwacji, że V jest nieskończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka jej podprzestrzeń właściwa $W \neq V$, że $W \simeq V$.

Spojrzawszy na powyższe rozważania możemy być nieco zawiedzeni pojęciami epimorfizmu i monomorfizmu – na razie zostały one sprowadzone niemal do roli „ozdobników" izomorfizmów. Sytuacja odmienia się jednak gdy rozważamy złożenia przekształceń. Tu pokazuje się szczególna rola dwóch typów rozważanych przekształceń. Chodzi tu zwłaszcza o problem tak zwanego przekształcenia odwrotnego.

Twierdzenie 2. *Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$ takie, że $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ oraz $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.*

Przekształcenie ψ jak w powyższym twierdzeniu nazywamy `przekształceniem odwrotnym` do ϕ.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje $\psi : W \to V$ takie, że $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ oraz $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_W$. Pokażemy, że ϕ jest izomorfizmem. Zacznijmy od różnowartościowości. Jeśli dla $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, to $\alpha = \psi(\phi(\alpha)) = \psi(\phi(\beta) = \beta$. Ponadto, dla każdego $\gamma \in W$ mamy $\gamma = \phi(\alpha)$, gdzie $\alpha = \psi(\gamma)$. A zatem ϕ jest „na". Jest to więc izomorfizm.

Na odwrót: przypuśćmy, że ϕ jest izomorfizmem. Niech $\pi : W \to V$ będzie zadane warunkiem $\psi(\beta) = \alpha$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(\alpha) = \beta$. Oczywiście jest to przekształcenie odwrotne do bijekcji, więc jest to bijekcja. Pozostaje sprawdzić, że jest to przekształcenie liniowe. Niech $\psi(\beta_1) = \alpha_1$ oraz $\psi(\beta_2) = \alpha_2$. Wówczas $\phi(\alpha_1) = \beta_1$ oraz $\phi(\alpha_2) = \beta_2$. Stąd $\phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$, a więc $\psi(\beta_1 + \beta_2) = \psi(\phi(\alpha_1 + \alpha_2)) = \alpha_1 + \alpha_2$. Analogicznie sprawdza się, że dla każdego $\beta \in W$ i dla każdego $c \in K$ mamy $\psi(c\beta) = c\psi(\beta)$. $\square$

Wniosek 5. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:*

- *ϕ jest monomorfizmem wtedy, i tylko wtedy gdy istnieje $\psi : W \to V$, że:*

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V .$$

- *ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\psi : W \to V$, że*

$$\phi \circ \psi = id_W.$$

Dowód pozostawiamy na ćwiczenia.

Dodatek. Faktoryzacje i przestrzenie ilorazowe

Jakiś czas temu w notatkach do wykładu pojawiła się definicja przestrzeni ilorazowej V/W, gdzie $W \subseteq V$ jest podprzestrzenią V. Wspomnieliśmy wówczas o formule $\dim V/W = \dim V - \dim W$. Jak ją wyprowadzić, do czego używa się takich przestrzeni, skąd taka nazwa i dlaczego warto o nich powiedzieć coś właśnie teraz, gdy zajmujemy się przekształceniami liniowymi? Kluczem do sprawy jest pojęcie faktoryzowania się przekształcenia liniowego, na swój sposób odwrotne do pojęcia złożenia. Oto definicja.

Definicja 4. *Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Powiemy, że ϕ faktoryzuje się przez przekształcenie $\psi : V' \to W$, jeśli istnieje przekształcenie $\pi : V \to V'$, że $\phi = \psi \circ \pi$, czyli następujący diagram jest przemienny.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & & W \\ & V' \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Oczywiście faktoryzacja zawsze jest możliwa, jeśli weźmiemy $V' = V$ oraz $\psi = \phi$. Sprawa jest jednak nieco ciekawsza. Popatrzmy najpierw na przykłady:

- Rozważmy przekształcenie $\phi : K^4 \to K$ dane wzorem $\phi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_4$. Jest ono oczywiście liniowe. Przekształcenie to faktoryzuje się przez $\psi' : K^2 \to K$ dane wzorem $\psi(y_1, y_2) = y_2$. Istotnie, jeśli $\pi : K^4 \to K^2$ dane jest wzorem: $\pi(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_2, z_4)$, to mamy: $\psi(\pi((x_1, x_2, x_3, x_4))) = \psi((x_2, x_4)) = x_4 = \phi((x_1, x_2, x_3, x_4))$. Mamy więc:

$$\begin{tikzcd} K^4 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & & K \\ & K^2 \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

- Rozważmy podprzestrzeń C przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$ złożoną z wszystkich ciągów zbieżnych i rozważmy przekształcenie $\phi : C \to \mathbb{R}$ dane wzorem $\phi((x_1, \ldots)) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Jest to oczywiście przekształcenie liniowe. Czy znajdziemy dla niego jakąś faktoryzację? Może ktoś uzna to za trywialne – ale owszem, jesteśmy w stanie to zrobić. Rozważmy podprzestrzeń D wszystkich ciągów stałych. Bierzemy teraz przekształcenie $\psi : D \to \mathbb{R}$ dane wzorem $\psi((x, x, x, ...)) = x$. Czy widzimy, że ϕ faktoryzuje się przez ψ? Jak wygląda przekształcenie π? I skąd wiedzieliśmy, żeby szukać właśnie ciągów stałych?
- Pytanie: czy izomorfizm można zawsze faktoryzować przez monomorfizm? A przez epimorfizm?

Kluczem jest pojęcie przestrzeni ilorazowej. Zauważmy, że jeśli $W \subseteq V$, to mamy naturalne przekształcenie $\pi : V \to V/W$ zadane wzorem: $\phi(\alpha) = \alpha + W$ (przyporządkowujemy wektorowi jego warstwę). Jest to dobrze określone przekształcenie liniowe. Jest to, dokładniej mówiąc, epimorfizm. Ze wzoru wyprowadzonego na wykładzie mamy zatem $\dim V = \dim W + \dim V/W$. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 (Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie)**.** *Niech $W \subseteq V$. Wówczas dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : V \to V'$ takiego, że $\ker(\phi)$ zawiera W, istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\psi : V/W \to V'$ takie, że $\phi = \pi \circ \psi$, czyli następujący diagram jest przemienny.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V' \\ & V/W \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

W szczególności dowolne przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ faktoryzuje się przez odpowiednie przekształcenie $\psi : V/ker(\phi) \to W$ dane wzorem: $\psi(\alpha + \ker(\phi)) = \phi(\alpha)$.

Czytelnik bez trudu udowodni ten rezultat, a wówczas otworzą się przed nim rozmaite ciekawe twierdzenia o przestrzeniach ilorazowych, tak zwane twierdzenia o izomorfizmie. Zainteresowani stosować będą te konstrukcje na semestrze gwiazdkowym, na przykład przy dowodzie twierdzenia Jordana, a zwłaszcza w dowodzie istnienia iloczynu tensorowego przestrzeni liniowych. Pojęcie przestrzeni ilorazowej pojawia się też, w nieco innym kontekście w topologii. Polecam świetny (choć w tym momencie raczej trudny) artykuł Michała Adamaszka: `http://www.msn.uph.edu.pl/smp/msn/46/aszek.pdf`.