I kolokwium ze Wstępu do Logiki,

r. ak. 2002/2003

1. Ile podalgebr ma algebra $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}_{pq}, +^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}} \rangle$, gdzie

   (a) p, q są liczbami pierwszymi,

   (b) $\mathbb{Z}_{pq} = \{0, \ldots, pq-1\}$,

   (c) $+^{\mathcal{Z}}$ to dodawanie modulo pq,

   (d) $0^{\mathcal{Z}} = 0$.

2. Niech Σ będzie sygnaturą, w której $\Sigma_1 = \{f\}$, zaś $\Sigma_i = \emptyset$ dla $i \neq 1$. Mówimy, że algebra $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}} \rangle$ jest *algebrą prostą*, gdy dla dowolnego $a \in A$ i dowolnego naturalnego $n > 0$ mamy $f^{\mathcal{A}n}(a) \neq a$ (g^n oznacza n-krotne wykonanie operacji g na elemencie, np. $g^2(a) = g(g(a))$). Które z następujących stwierdzeń są prawdziwe?

   (a) Każda algebra prosta jest nieskończona.

   (b) Podalgebra algebry prostej jest zawsze algebrą prostą.

   (c) Produkt dowolnej rodziny algebr prostych jest algebrą prostą.

   (d) Klasa algebr prostych jest równościowo definiowalna.

   (e) W klasie algebr prostych istnieją algebry wolne nad dowolną niezerową liczbą wolnych generatorów.

   (f) Istnieje algebra prosta $\mathcal{A}$ i kongruencja r różna od identyczności taka, że $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/r$ są izomorficzne.

   (g) Dla dowolnych algebr prostych $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, z których każda jest generowana przez 1 element, algebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ jest generowana przez co najmniej 2 elementy.

3* Niech Σ będzie sygnaturą jak w zadaniu 2. Algebrę $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}} \rangle$ nazwiemy *algebrą z kółkiem*, gdy

   - istnieje taki element $a \in A$ oraz liczba naturalna $n > 0$ takie, że $f^{\mathcal{A}n}(a) = a$ oraz
   - dla każdego elementu a o powyższej własności, jeśli istnieje $b \in A$ oraz liczba naturalna $m > 0$ takie, że $f^{\mathcal{A}m}(b) = a$, to istnieje liczba naturalna $k > 0$ taka, że $f^{\mathcal{A}k}(a) = b$.

   Czy w klasie algebr z kółkiem istnieje podklasa $\mathbb{K}$ o tej własności, że dla każdego zbioru G istnieje algebra, która jest

   - wolna w klasie $\mathbb{K}$ nad zbiorem wolnych generatorów G oraz jednocześnie
   - ma co najmniej $\aleph_0$ kongruencji, dla których algebra ilorazowa należy do $\mathbb{K}$.

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Każde rozwiązanie należy spisać na oddzielnej kartce. Za każde zadanie jest 10 punktów. Zdobycie 20 punktów odpowiada uzyskaniu piątki. Czas trwania kolokwium: 90 minut. Powodzenia!