II kolokwium ze Wstępu do Logiki,

r. ak. 2002/2003

Uwaga: w razie wątpliwości konwencje nawiasowania formuł znajdują się na stronie 2.

1. Udowodnić w wybranym systemie dowodzenia następujące schematy tautologii

   (a) $(\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \beta) \to (\alpha \vee \gamma) \to \beta$,

   (b) $((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \to \neg\alpha \to ((\beta \vee \gamma) \wedge \neg\alpha)$ (w przypadku tej tautologii można skorzystać z założenia, że w wybranym systemie mamy dowód $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$ dla dowolnych α i β).

2. Czy spełnialne są następujące formuły rachunku zdań:

   (a) $((p \wedge q) \vee (p \to q)) \to (p \vee q)$,

   (b) $((p \vee q) \to r) \wedge (\neg(p \to r) \wedge \neg(q \to r))$?

3. Sygnatura Σ określona jest tak, że $\Sigma_1 = \{f\}$, zaś $\Sigma_i = \emptyset$ dla $i \neq 1$. Napisać 2 formuły bez zmiennych wolnych ϕ, z których

   - jedna jest spełnialna w modelu $\mathcal{A}$, w którym nośnik jest równy $\mathbb{N}$, zaś $f^{\mathcal{A}}(n) = n + 1$, a nie jest spełnialna w modelu $\mathcal{B}$ z nośnikiem $\mathbb{N}$ i $f^{\mathcal{B}}(n) = 2^n + n \bmod 2$;
   - druga jest spełnialna w modelu $\mathcal{A}$, określonym jak powyżej, a nie jest spełnialna w modelu $\mathcal{C}$ z nośnikiem $\mathbb{N}$ i

$$f^{\mathcal{C}}(n) = \begin{cases} n/\min\{p \mid p \text{ jest pierwsze i dzieli } n\} & \text{dla } n > 1, \\ 1 & \text{dla } n = 0, \\ 1 & \text{dla } n = 1. \end{cases}$$

4. Niech P, Q, R, S będą jednoargumentowymi symbolami relacyjnymi. Które z następujących formuł są spełnialne, które są tautologiami:

   (a) $(\exists y \forall z P(y) \to Q(z)) \to (\exists y P(y) \to \forall z Q(z))$,

   (b) $(\forall x R(x)) \vee (\forall x S(x)) \to (\forall x R(x) \vee S(x))$.

5* Niech będzie dana sygnatura Σ taka, że

$$\Sigma_0 = \{0, 1\},$$
$$\Sigma_1 = \{f, (\cdot)^{-1}, -(\cdot)\},$$
$$\Sigma_2 = \{+, *\},$$
$$\Sigma_i = \emptyset \text{ dla } i > 2.$$

Pokazać, że nie istnieje teoria T zawierająca aksjomaty teorii ciał, taka że algebra $\mathcal{A}$ jest modelem dla T wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{\mathcal{A}}$ jest jakimś wielomianem. Dla przypomnienia aksjomaty ciał to:

$\forall x \forall y\ x + y = y + x$	$\forall x \forall y \forall z\ (x + y) + z = x + (y + z)$
$\forall x \forall y\ x * y = y * x$	$\forall x \forall y \forall z\ (x * y) * z = x * (y * z)$
$\forall x\ x + 0 = x$	$\forall x\ x + -(x) = 0$
$\forall x\ x * 1 = x$	$\forall x\ x * (x)^{-1} = 1$
$\forall x \forall y \forall z\ x * (y + z) = x * y + x * z$	$\neg 0 = 1$

Wielomianem jest funkcja $g : A \to A$ wyrażająca się jakimś wzorem postaci: $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Każde rozwiązanie należy spisać na oddzielnej kartce. Za każde zadanie jest 5 punktów. Zdobycie 20 punktów odpowiada uzyskaniu piątki. Czas trwania kolokwium: 90 minut. Powodzenia!

System naturalnej dedukcji dla logiki zdaniowej

Aksjomaty

(A0) $\Delta, \alpha \vdash \alpha$;

Reguły dowodzenia

$$(\to -\text{intro})\frac{\Delta, \alpha \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \to \beta} \qquad (\to -\text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \to \beta; \quad \Delta \vdash \alpha}{\Delta \vdash \beta}$$

$$(\wedge - \text{intro})\frac{\Delta \vdash \alpha; \quad \Delta \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \wedge \beta} \qquad (\wedge - \text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \wedge \beta}{\Delta \vdash \alpha} \qquad (\wedge - \text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \wedge \beta}{\Delta \vdash \beta}$$

$$(\vee - \text{intro})\frac{\Delta \vdash \alpha}{\Delta \vdash \alpha \vee \beta} \qquad (\vee - \text{intro})\frac{\Delta \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \vee \beta} \qquad (\vee - \text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \vee \beta; \quad \Delta, \alpha \vdash \gamma; \quad \Delta, \beta \vdash \gamma}{\Delta \vdash \gamma}$$

$$(\text{PS})\frac{\Delta, \neg\alpha \vdash \bot}{\Delta \vdash \alpha}$$

Konwencje nawiasowe

Zasięg kwantyfikatora obejmuje od jego wystąpienia do nawiasu zamykającego podwyrażenie, w którym wystąpił kwantyfikator, lub do końca formuły, czyli zapis $\forall x \alpha \to \beta$ oznacza, że x jest związane w α i β, zaś zapis $(\forall x \alpha) \to \beta$, że tylko w α. W przypadku $\to$ fromuła $\alpha \to \beta \to \gamma$ oznacza $\alpha \to (\beta \to \gamma)$. Spójniki $\wedge, \vee$ wiążą mocniej od strzałki, czyli na przykład $\alpha \to \beta \wedge \gamma$ oznacza $\alpha \to (\beta \wedge \gamma)$. Spójnik $\neg$ wiąże mocniej niż $\wedge, \vee$, czyli $\neg\alpha \vee \beta$ to $(\neg\alpha) \vee \beta$.

System gentzenowski dla logiki zdaniowej

Aksjomaty

(A0) $\Delta, \alpha \vdash \alpha, \Gamma;$

Reguły dowodzenia

$$\text{(LN)}\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \Delta} \qquad \text{(PN)}\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\alpha, \Delta}$$

$$\text{(LC)}\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta} \qquad \text{(PC)}\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta; \quad \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Delta}$$

$$\text{(LA)}\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta; \quad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta} \qquad \text{(PA)}\frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Delta}$$

$$\text{(LI)}\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta; \quad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \to \beta \vdash \Delta} \qquad \text{(PI)}\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta}$$

$$\text{(cięcie)}\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta; \quad \Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

System hilbertowski dla logiki 1. rzędu

Aksjomaty

Dowolne generalizacje następujących sekwentów:

(A0) $\Delta, \alpha \vdash \alpha$;

(A1) $\Delta \vdash \alpha \to \beta \to \alpha$;

(A2) $\Delta \vdash (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$;

(A3) $\Delta \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$;

(A4) $\Delta \vdash (\forall x \alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha) \to (\forall x \beta)$

(A5) $\Delta \vdash \alpha \to \forall x \alpha$, o ile $x \notin \mathrm{FV}(\alpha)$;

(A6) $\Delta \vdash (\forall x \alpha) \to \alpha(\sigma/x)$, o ile σ jest dopuszczalny dla x w α;

(A7) $\Delta \vdash x = x$;

(A8) $\Delta \vdash x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \cdots \to x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$ dla $f \in \Sigma_n^F, n \geq 0$;

(A9) $\Delta \vdash x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \cdots \to x_n = y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$ dla $r \in \Sigma_n^F, n \geq 1$;

(C1) $\Delta \vdash (\alpha \wedge \beta) \to \neg(\alpha \to \neg\beta)$;

(C2) $\Delta \vdash \neg(\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \wedge \beta)$;

(D1) $\Delta \vdash (\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$;

(D1) $\Delta \vdash (\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \beta)$;

(E1) $\Delta \vdash (\exists x \alpha) \to \neg\forall x \neg\alpha$;

(E2) $\Delta \vdash \neg(\forall x \neg\alpha) \to \exists x \alpha$.

Reguła dowodzenia

$$(\mathrm{MP})\frac{\Delta \vdash \alpha; \quad \Delta \vdash \alpha \to \beta}{\Delta \vdash \beta}$$