Egzamin poprawkowy ze Wstępu do logiki

r. ak. 2002/2003

Uwaga: w razie wątpliwości konwencje nawiasowania formuł znajdują się na stronie 2.

Kolejność rozwiązywania dowolna. Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Każde rozwiązanie należy spisać na oddzielnej kartce. Przy każdym zadaniu podana jest maksymalna liczba punktów, jaką można za nie uzyskać. Zdobycie 60 punktów odpowiada uzyskaniu maksymalnej oceny. Czas trwania egzaminu: 180 minut. Powodzenia!

1. **(10 pkt.)** Niech sygnatura Σ będzie określona tak, że $\Sigma_1^F = \{f\}$, zaś $\Sigma_i^F = \emptyset$ dla $i \neq 1$. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie ustaloną liczbą naturalną większą od 0. Niech klasa $\mathcal{K}_n$ algebr będzie określona tak, że dla każdej algebry $\mathcal{A} \in \mathcal{K}_n$ i każdego elementu $a \in A$ (gdzie A jest nośnikiem $\mathcal{A}$) mamy $f^{\mathcal{A}n}(a) = a$ oraz dla każdego $k \in \mathbb{N}$, jeśli $0 < k < n$, to $f^{\mathcal{A}k}(a) \neq a$ ($f^n(a)$ oznacza n-krotne zaaplikowanie funkcji f do elementu a, np. $f^2(a) = f(f(a))$). Czy dla każdego n tak określona klasa jest równościowo definiowalna?

2. **(10 pkt.)** Udowodnić w wybranym systemie dowodzenia następujące schematy tautologii rachunku zdań:

   (a) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \wedge \beta) \to \gamma$,

   (b) $((\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma) \to (\beta \to \alpha \to \beta) \to \beta \to \alpha \to \gamma$.

3. **(10 pkt.)** Określ, które z poniższych formuł nad odpowiednimi sygnaturami są spełnialne i które są tautologiami:

   (a) $(\exists x P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x)) \to (\exists x Q(x))$,

   (b) $(\forall x Q(x)) \wedge \neg(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x) \to P(x))$.

4. **(15 pkt.)** Niech Σ będzie sygnaturą składającą się wyłącznie z dwóch symboli relacyjnych dwuargumentowych $\equiv$ i $=$. Dla poniżej podanych własności albo

   - napisać zdanie ϕ w języku logiki pierwszego rzędu prawdziwe dokładnie tylko w tych modelach $\mathcal{A}$, w których $\equiv^{\mathcal{A}}$ jest relacją równoważności na $\mathcal{A}$ i spełnia daną własność, albo
   - dowieść, że takie zdanie nie istnieje; w tym przypadku zastanowić się, czy istnieje zbiór zdań wyrażający daną własność.

   Własności:

   (a) $\equiv^{\mathcal{A}}$ ma klasę abstrakcji o co najmniej dwóch elementach,

   (b) $\equiv^{\mathcal{A}}$ ma jednoelementową klasę abstrakcji,

   (c) $\equiv^{\mathcal{A}}$ ma dokładnie 3 jednoelementowe klasy abstrakcji,

   (d) $\equiv^{\mathcal{A}}$ ma nieskończenie wiele jednoelementowych klas abstrakcji,

   (e) $\equiv^{\mathcal{A}}$ nie ma jednoelementowych klas abstrakcji,

   (f) $\equiv^{\mathcal{A}}$ nie ma nieskończenie wielu jednoelementowych klas abstrakcji.

5. **(7 pkt.)** Niech $\mathcal{T}$ będzie teorią nad sygnaturą Σ taką, że $\{=, E\} \subseteq \Sigma_2^R$ i każde Σ_i^R oraz Σ_i^F dla $i \in \mathbb{N}$ jest przeliczalne. Tego rodzaju teorie mogą służyć do opisywania różnych klas grafów. Pokazać, że jeśli dla każdego n istnieje graf mocy 2^n, będący modelem teorii $\mathcal{T}$, to istnieje również graf mocy przeliczalnej będący modelem $\mathcal{T}$.

6. **(8 pkt.)** Dla każdej z niżej wymienionych algebr podać moc zbioru wszystkich jej podalgebr.

   (a) $\langle Q, + \rangle$, której nośnikiem jest zbiór liczb wymiernych, a $+$ jest dodawaniem w Q,

   (b) $\langle P^{\text{fin}}(\mathbb{N}), \{u_i, d_i \mid i \in N, i \geq 1\} \rangle$, w której nośnikiem jest zbiór $P^{\text{fin}}(\mathbb{N})$ skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych, a operacje u_i, d_i odpowiadają odpowiednio usunięciu ze zbioru elementów większych od i oraz dodaniu do zbioru i kolejnych elementów większych od największego elementu zbioru, np.:

   $$u_1(\{1,3\}) = \{1\} \quad u_2(\{1\}) = \{1\} \quad d_3(\{1,3,5\}) = \{1,3,5,6,7,8\}$$
   $$d_2(\emptyset) = \{0,1\}$$

   (Uwaga: w tym podpunkcie jest nieskończenie wiele operacji; przypadek specjalny dla $d_i(\emptyset)$ wyjaśnia przykład.)

7.* **(7 pkt.)** Dla algebr jak w zadaniu (6) podać moc zbioru kongruencji.

System naturalnej dedukcji dla logiki zdaniowej

Aksjomaty

(A0) $\Delta, \alpha \vdash \alpha;$

Reguły dowodzenia

$$(\to -\text{intro})\frac{\Delta, \alpha \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \to \beta} \qquad (\to -\text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \to \beta; \quad \Delta \vdash \alpha}{\Delta \vdash \beta}$$

$$(\wedge - \text{intro})\frac{\Delta \vdash \alpha; \quad \Delta \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \wedge \beta} \qquad (\wedge - \text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \wedge \beta}{\Delta \vdash \alpha} \qquad (\wedge - \text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \wedge \beta}{\Delta \vdash \beta}$$

$$(\vee - \text{intro})\frac{\Delta \vdash \alpha}{\Delta \vdash \alpha \vee \beta} \qquad (\vee - \text{intro})\frac{\Delta \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \vee \beta} \qquad (\vee - \text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \vee \beta; \quad \Delta, \alpha \vdash \gamma; \quad \Delta, \beta \vdash \gamma}{\Delta \vdash \gamma}$$

$$(\text{PS})\frac{\Delta, \neg\alpha \vdash \bot}{\Delta \vdash \alpha}.$$

Konwencje nawiasowe

Zasięg kwantyfikatora obejmuje od jego wystąpienia do nawiasu zamykającego podwyrażenie, w którym wystąpił kwantyfikator, lub do końca formuły, czyli zapis $\forall x\alpha \to \beta$ oznacza, że x jest związane w α i β, zaś zapis $(\forall x\alpha) \to \beta$, że tylko w α. W przypadku $\to$ fromuła $\alpha \to \beta \to \gamma$ oznacza $\alpha \to (\beta \to \gamma)$. Spójniki $\wedge, \vee$ wiążą mocniej od strzałki, czyli na przykład $\alpha \to \beta \wedge \gamma$ oznacza $\alpha \to (\beta \wedge \gamma)$. Spójnik $\neg$ wiąże mocniej niż $\wedge, \vee$, czyli $\neg\alpha \vee \beta$ to $(\neg\alpha) \vee \beta$.

System gentzenowski dla logiki zdaniowej

Aksjomaty

(A0) $\Delta, \alpha \vdash \alpha, \Gamma$;

(A$\bot$) $\Delta, \bot \vdash \Gamma$.

Reguły dowodzenia

$$\text{(LN)}\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \Delta} \qquad \text{(PN)}\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\alpha, \Delta}$$

$$\text{(LC)}\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta} \qquad \text{(PC)}\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta; \quad \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Delta}$$

$$\text{(LA)}\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta; \quad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta} \qquad \text{(PA)}\frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Delta}$$

$$\text{(LI)}\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta; \quad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \to \beta \vdash \Delta} \qquad \text{(PI)}\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta}$$

$$\text{(cięcie)}\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta; \quad \Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}.$$

System hilbertowski dla logiki 1. rzędu

Aksjomaty

Dowolne generalizacje następujących sekwentów:

(A0) $\Delta, \alpha \vdash \alpha$;

(A1) $\Delta \vdash \alpha \to \beta \to \alpha$;

(A2) $\Delta \vdash (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$;

(A3) $\Delta \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$;

(A4) $\Delta \vdash (\forall x \alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha) \to (\forall x \beta)$;

(A5) $\Delta \vdash \alpha \to \forall x \alpha$, o ile $x \notin \mathrm{FV}(\alpha)$;

(A6) $\Delta \vdash (\forall x \alpha) \to \alpha(\sigma/x)$, o ile σ jest dopuszczalny dla x w α;

(A7) $\Delta \vdash x = x$;

(A8) $\Delta \vdash x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \cdots \to x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$ dla $f \in \Sigma_n^F, n \geq 0$;

(A9) $\Delta \vdash x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \cdots \to x_n = y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$ dla $r \in \Sigma_n^F, n \geq 1$;

(C1) $\Delta \vdash (\alpha \wedge \beta) \to \neg(\alpha \to \neg\beta)$;

(C2) $\Delta \vdash \neg(\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \wedge \beta)$;

(D1) $\Delta \vdash (\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$;

(D2) $\Delta \vdash (\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \beta)$;

(E1) $\Delta \vdash (\exists x \alpha) \to \neg\forall x \neg\alpha$;

(E2) $\Delta \vdash \neg(\forall x \neg\alpha) \to \exists x \alpha$.

Reguła dowodzenia

$$(\mathrm{MP})\frac{\Delta \vdash \alpha; \quad \Delta \vdash \alpha \to \beta}{\Delta \vdash \beta}.$$