Egzamin pisemny ze Wstępu do logiki

r. ak. 2002/2003

Uwaga: w razie wątpliwości konwencje nawiasowania formuł znajdują się na stronie 2.

1. **(10 pkt.)** Niech sygnatura Σ będzie określona tak, że $\Sigma_1^F = \{f\}$, zaś $\Sigma_i^F = \emptyset$ dla $i \neq 1$ oraz $\Sigma_2^R = \{=\}$ i $\Sigma_i^R = \emptyset$ dla $i \neq 2$. Czy klasa $\mathcal{K}$ algebr $\mathcal{A}$ takich, że $f^{\mathcal{A}}$ jest funkcją „na” jest równościowo definiowalna?

2. **(10 pkt.)** Udowodnić w wybranym systemie dowodzenia następujące schematy tautologii rachunku zdań

   (a) $(\alpha \wedge \beta \to \gamma) \to (\alpha \wedge \neg\gamma) \to \neg\beta$,

   (b) $((\alpha \vee \beta) \to \gamma) \to ((\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma))$.

3. **(10 pkt.)** Określ, które z poniższych formuł nad odpowiednimi sygnaturami są spełnialne, które są tautologiami:

   (a) $(\forall x P(f(x)) \vee Q(x)) \wedge (\exists x \forall y \neg P(y) \wedge \neg Q(x))$,

   (b) $(\forall x \forall y (R(x,y) \to x = y) \wedge (R(y,x) \to x = y)) \to (\forall x \forall y R(x,y))$.

4. **(15 pkt.)** Niech Σ będzie sygnaturą składającą się wyłącznie z dwóch symboli relacyjnych dwuargumentowych $\leq$ i $=$. Dla poniżej podanych własności albo

   - napisać zdanie ϕ w języku logiki pierwszego rzędu prawdziwe dokładnie tylko w tych modelach $\mathcal{A}$, w których $\leq$ jest częściowym porządkiem na $\mathcal{A}$ i spełnia daną własność, albo
   - dowieść, że takie zdanie nie istnieje; w tym przypadku zastanowić się, czy istnieje zbiór zdań wyrażający daną własność.

   Własności:

   (a) $\mathcal{A}$ ma element najmniejszy,

   (b) $\mathcal{A}$ ma element minimalny,

   (c) $\mathcal{A}$ ma dokładnie 3 elementy minimalne,

   (d) $\mathcal{A}$ ma nieskończenie wiele elementów minimalnych,

   (e) $\mathcal{A}$ nie ma elementu minimalnego,

   (f) $\mathcal{A}$ nie ma nieskończenie wielu elementów minimalnych.

5. **(7 pkt.)** Niech $\mathcal{T}$ będzie teorią nad skończoną sygnaturą Σ, która dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ma model mocy większej od n. Pokazać, że taka teoria ma również model mocy przeliczalnej.

6. **(8 pkt.)** Dla każdej z niżej wymienionych algebr podać moc zbioru wszystkich podalgebr danej algebry.

   (a) $\langle Q \cap [0,1], \cdot \rangle$, której nośnikiem jest zbiór liczb wymiernych z przedziału domkniętego $[0,1]$, a $\cdot$ jest mnożeniem w Q,

   (b) $\langle \{0,1\}^*, \{u_i, z_i, j_i \mid i \in N, i \geq 1\} \rangle$, w której nośnikiem są skończone słowa nad alfabetem złożonym z 0 i 1, a operacje u_i, z_i, j_i odpowiadają odpowiednio obcięciu słowa po i-tej literze, dopisaniu na końcu słowa i zer, dopisaniu na końcu słowa i jedynek, np.:

   $$u_1(1010) = 1 \quad u_2(1) = 1 \qquad z_3(101010) = 101010000$$
   $$j_2(101010) = 10101011$$

   (Uwaga: w tym podpunkcie jest nieskończenie wiele operacji.)

7.* **(7 pkt.)** Dla algebr jak w zadaniu (6) podać moc zbioru kongruencji.

Kolejność rozwiązywania dowolna. Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Każde rozwiązanie należy spisać na oddzielnej kartce. Przy każdym zadaniu podana jest maksymalna liczba punktów, jaką można za nie uzyskać. Zdobycie 60 punktów odpowiada uzyskaniu piątki. Czas trwania kolokwium: 180 minut. Powodzenia!

System naturalnej dedukcji dla logiki zdaniowej

Aksjomaty

(A0) $\Delta, \alpha \vdash \alpha$;

Reguły dowodzenia

$$(\to -\text{intro})\frac{\Delta, \alpha \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \to \beta} \qquad (\to -\text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \to \beta; \quad \Delta \vdash \alpha}{\Delta \vdash \beta}$$

$$(\wedge - \text{intro})\frac{\Delta \vdash \alpha; \quad \Delta \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \wedge \beta} \qquad (\wedge - \text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \wedge \beta}{\Delta \vdash \alpha} \qquad (\wedge - \text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \wedge \beta}{\Delta \vdash \beta}$$

$$(\vee - \text{intro})\frac{\Delta \vdash \alpha}{\Delta \vdash \alpha \vee \beta} \qquad (\vee - \text{intro})\frac{\Delta \vdash \beta}{\Delta \vdash \alpha \vee \beta} \qquad (\vee - \text{elim})\frac{\Delta \vdash \alpha \vee \beta; \quad \Delta, \alpha \vdash \gamma; \quad \Delta, \beta \vdash \gamma}{\Delta \vdash \gamma}$$

$$(\text{PS})\frac{\Delta, \neg\alpha \vdash \bot}{\Delta \vdash \alpha}$$

Konwencje nawiasowe

Zasięg kwantyfikatora obejmuje od jego wystąpienia do nawiasu zamykającego podwyrażenie, w którym wystąpił kwantyfikator, lub do końca formuły, czyli zapis $\forall x \alpha \to \beta$ oznacza, że x jest związane w α i β, zaś zapis $(\forall x \alpha) \to \beta$, że tylko w α. W przypadku $\to$ fromuła $\alpha \to \beta \to \gamma$ oznacza $\alpha \to (\beta \to \gamma)$. Spójniki $\wedge, \vee$ wiążą mocniej od strzałki, czyli na przykład $\alpha \to \beta \wedge \gamma$ oznacza $\alpha \to (\beta \wedge \gamma)$. Spójnik $\neg$ wiąże mocniej niż $\wedge, \vee$, czyli $\neg\alpha \vee \beta$ to $(\neg\alpha) \vee \beta$.

System gentzenowski dla logiki zdaniowej

Aksjomaty

(A0) $\Delta, \alpha \vdash \alpha, \Gamma;$

Reguły dowodzenia

$$(\mathrm{LN})\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \Delta} \qquad (\mathrm{PN})\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\alpha, \Delta}$$

$$(\mathrm{LC})\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta} \qquad (\mathrm{PC})\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta; \quad \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Delta}$$

$$(\mathrm{LA})\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta; \quad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta} \qquad (\mathrm{PA})\frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Delta}$$

$$(\mathrm{LI})\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta; \quad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \to \beta \vdash \Delta} \qquad (\mathrm{PI})\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta}$$

$$(\text{cięcie})\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta; \quad \Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

System hilbertowski dla logiki 1. rzędu

Aksjomaty

Dowolne generalizacje następujących sekwentów:

(A0) $\Delta, \alpha \vdash \alpha$;

(A1) $\Delta \vdash \alpha \to \beta \to \alpha$;

(A2) $\Delta \vdash (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$;

(A3) $\Delta \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$;

(A4) $\Delta \vdash (\forall x \alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha) \to (\forall x \beta)$

(A5) $\Delta \vdash \alpha \to \forall x \alpha$, o ile $x \notin \mathrm{FV}(\alpha)$;

(A6) $\Delta \vdash (\forall x \alpha) \to \alpha(\sigma/x)$, o ile σ jest dopuszczalny dla x w α;

(A7) $\Delta \vdash x = x$;

(A8) $\Delta \vdash x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \cdots \to x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$ dla $f \in \Sigma_n^F, n \geq 0$;

(A9) $\Delta \vdash x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \cdots \to x_n = y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$ dla $r \in \Sigma_n^F, n \geq 1$;

(C1) $\Delta \vdash (\alpha \wedge \beta) \to \neg(\alpha \to \neg\beta)$;

(C2) $\Delta \vdash \neg(\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \wedge \beta)$;

(D1) $\Delta \vdash (\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$;

(D2) $\Delta \vdash (\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \beta)$;

(E1) $\Delta \vdash (\exists x \alpha) \to \neg\forall x \neg\alpha$;

(E2) $\Delta \vdash \neg(\forall x \neg\alpha) \to \exists x \alpha$.

Reguła dowodzenia

$$(\mathrm{MP})\frac{\Delta \vdash \alpha; \quad \Delta \vdash \alpha \to \beta}{\Delta \vdash \beta}$$