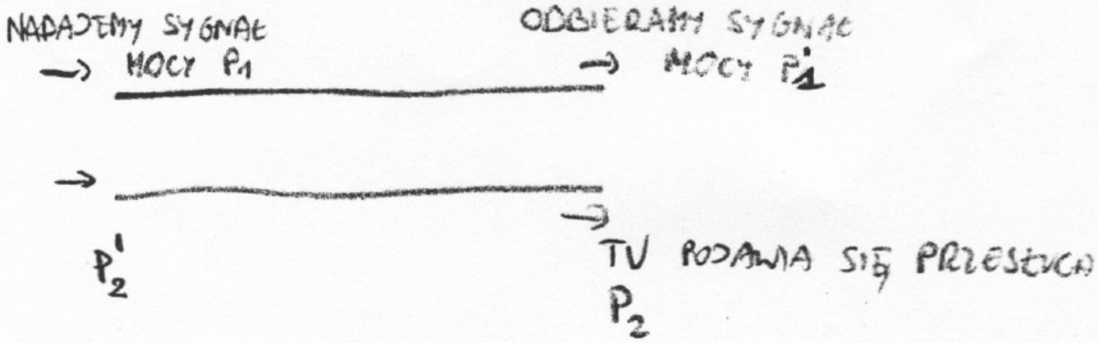
WYKŁAD II

1. UZUPEŁNIENIE

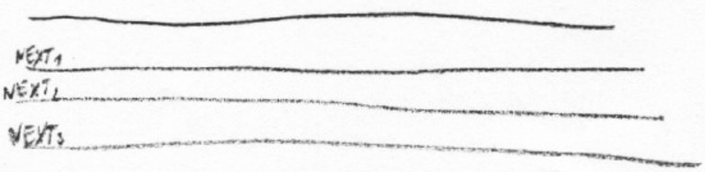
NEXT: NEAR-END CROSST TALK
FEXT: FAR-END CROSS TALK



$$FEXT = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

$$ELFEXT = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1'}$$ (EQUAL LEVEL FEXT)

$$NEXT = 10 \log_{10} \frac{P_2'}{P_1}$$



$$PSNEXT = 10 \cdot \log_{10} \left(10^{NEXT_1/10} + 10^{NEXT_2/10} + 10^{NEXT_3/10}\right)$$

2. PRZESYŁANIE BEZ SZUMU

- JAK PRZESYŁAĆ, ŻEBY BYŁO NAJSZYBCIEJ?
- IDEA:
  - KOMUNIKAT SKŁADA SIĘ Z RÓŻNYCH ZNAKÓW
  - NIEKTÓRE ZNAKI WYSTĘPUJĄ CZĘŚCIEJ, INNE RZADZIEJ:

    PRZYKŁAD: KARTKA PAPIERU Z MAŁYM NAPISEM U GÓRY

  - ZNAKI WYSTĘPUJĄCE CZĘŚCIEJ REPREZENTOWANE ZA POMOCĄ MNIEJSZEJ LICZBY BITÓW

    PRZYKŁAD C.D.: ZAŁÓŻMY, ŻE NAPIS ZAJMUJE 1% KARTKI
    TRANSMITUJEMY 8-BITOWE ZNAKI
    JAK MAMY 00000000, TO WYSYŁAMY 0,
    WPP. WYSYŁAMY 1 $\boxed{\text{JAKI ZNAK}}$
    ILE WYNOSI WARTOŚĆ OCZEKIWANA DŁ. TRANSMISJI?

$$\text{L. BITÓW} = \left(\frac{99}{100} \cdot 1 + \frac{1}{100} \cdot 9\right) \cdot \text{L. ZNAKÓW} =$$

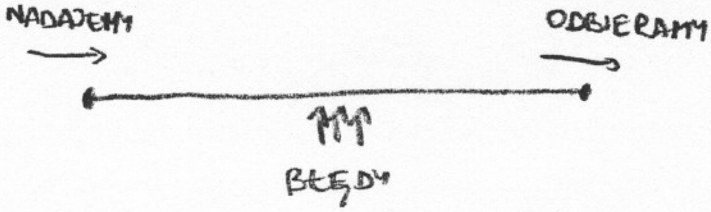
$$= 1.08 \cdot \text{L. ZNAKÓW}$$

- IDEA TA JEST REALIZOWANA PRZEZ KODY HUFFMANA -
- KODY HUFFMANA SĄ NIEPRAKTYCZNE, BO NIE MOŻNA ICH OBLICZYĆ "W LOCIE"
- CIEKAWE PYTANIE: ILE ŚREDNIO ZAJMUJE 1 OPTYMALNY SYMBOL?

$$h(D) = \sum_{x \in U} \Pr(\text{WYSTĄPIENIE } x \text{ W } D) \cdot \log_2 \frac{1}{\Pr(\text{WYSTĄPIENIE } x \text{ W } D)} = \text{ENTROPIA}$$

- D - DANE (ROZKŁAD PRAWDOPODOBIEŃSTWA)
- U - ZBIÓR SYMBOLI

2. KANAŁ GAUSSOWSKI



- CZAS DYSKRETNY
- PRZESYŁANE WARTOŚCI RZECZYWISTE

$$Y_i = X_i + Z_i$$

ODBIERANA WARTOŚĆ

NADAWANA WARTOŚĆ

SZUM O ROZKŁADZIE GAUSSOWSKIM $Z_i \sim \mathcal{N}(0,N)$

- DODATKOWE OGRANICZENIE:

  DLA DOWOLNEGO KODU $(x_1, \dots, x_n)$ MAMY

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq P$$

- INTERPRETACJA:

  P – MOC SYGNAŁU

  N – MOC SZUMU

- PORÓWNANIE DWÓCH ZBIORÓW DANYCH: X, Y

$I(X,Y) =$ ŚR. DŁ. KODU PRODUKTOWEGO − ŚR. DŁ. OPTYMALNEGO KODU

- KOD PRODUKTOWY DLA w_1, w_2: $w_1 \cdot w_2$
- KOD OPTYMALNY: J.W. — NAJPIERW ŁĄCZYMY DANE, A POTEM WYLICZAMY GLOBALNĄ OPTYMALNĄ WARTOŚĆ

— POJEMNOŚĆ KANAŁU GAUSSOWSKIEGO

$$C = \max_{p(x):\, EX^2 \leq P} I(X,Y)$$

— OKAZUJE SIĘ ŻE:

1) $C \leq \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P}{N}\right)$

2) ISTNIEJĄ KODOWANIA SYGNAŁÓW, KTÓRE DOWOLNIE ZBLIŻAJĄ SIĘ DO TEJ WARTOŚCI

3) NIE ISTNIEJĄ KODOWANIA, KTÓRE PRZEKRACZAJĄ TĘ LICZBĘ BITÓW/SEK.

JAK POKAZAĆ 2?

— PRZESYŁAMY n SYGNAŁÓW (n WSPÓŁRZĘDNYCH)

— NA KAŻDEJ WSPÓŁRZĘDNEJ Z DUŻYM PRAWDOPODOBIEŃSTWEM ILOŚĆ ZAKŁÓCEŃ JEST MNIEJSZA NIŻ $N+\varepsilon$

— ZATEM ODEBRANY ZOSTANIE SYGNAŁ Z OTOCZENIA SYGNAŁU NADAWANEGO O PROMIENIU $\sqrt{n(N+\varepsilon)}$

— PONIEWAŻ

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq P$$

ORAZ SZUM DODAJE CO NAJWYŻEJ $N+\varepsilon$ MOCY, TO CAŁOŚĆ MIEŚCI SIĘ W KULI O PROMIENIU

$$\sqrt{n(P+N)}$$

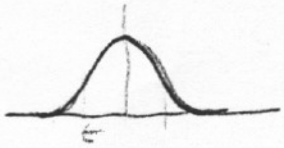
— ILE MAŁYCH, ROZŁĄCZNYCH KUL MIEŚCI SIĘ W DUŻEJ KULI

$$\frac{A_n\left(\sqrt{n(P+N+\varepsilon)}\right)^n}{A_n\left(\sqrt{n(N+\varepsilon)}\right)^n} = 2^{\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}+\varepsilon'\right)}$$

JAK POKAZAĆ 3?

— ENTROPIA DLA ROZKŁADU NORMALNEGO D

$N(0, \sigma)$



$$h(D) = \frac{1}{2} \log \left(2\pi e \sigma^2 \right)$$

ŻEBY DOBRZE „ROZPOZNAĆ" ROZKŁAD NORMALNY TRZEBA UŻYĆ $\sqrt{2\pi e \sigma^2}$ PUNKTÓW.

— ROZKŁAD NORMALNY JEST „NAJGORSZY"

3. TWIERDZENIE SHANONA O PRÓBKOWANIU

NIECH $f(t, \varphi)$ BĘDZIE MIAŁA OGRANICZONE PASMO DO W (TYLKO CZĘSTOTLIWOŚCI Z PRZEDZIAŁU $[0, W]$). FUNKCJA f JEST OKREŚLONA W PEŁNI PRZEZ PRÓBKI UMIESZCZONE CO $\frac{1}{2W}$ SEKUND.

DOWÓD:

— $F(\omega)$ — SPEKTRUM f.

— Z ANALIZY FOURIEROWSKIEJ

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

— PRÓBKUJEMY:

$$f\left(\frac{n}{2W}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{i\omega \frac{n}{2W}} \, d\omega$$

WSPÓŁCZYNNIKI FOURIEROWSKIE

4. JAWNY WZÓR Z TW. SHANNONA

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2W}\right) \operatorname{sinc}\left(t - \frac{n}{2W}\right)$$

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(2\pi W t)}{2\pi W t}$$

5. PRÓBKOWANIE W KANALE GAUSSOWSKIM

- SZUM MA GĘSTOŚĆ $\frac{N_0}{2}$
- MOC SZUMU W PAŚMIE W:

$$\frac{N_0}{2} \cdot 2W = N_0 W$$

- MOC PRÓBKI: $\frac{P}{2W}$
- MOC SZUMU PRZY PRÓBCE: $\frac{N_0}{2}$
- POJEMNOŚĆ 1 PRÓBKI:

$$\frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\frac{P}{2W}}{\frac{N_0}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right)$$

- PONIEWAŻ MAMY $2W$ PRÓBEK:

$$C = 2W \cdot \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) = W \log_2\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right)$$