Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Radosław Bojanowski
Nr albumu: 181112

Zastosowania uogólnionej nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dr Adriana Langera
Instytut Matematyki
wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Lipiec 2003

Pracę przedkładam do oceny

Data Podpis autora pracy:

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta

Data Podpis kierującego pracą:

Streszczenie

Klasyczna nierówność Bogomolova-Miyaoki-Yau $c_1^2 \leqslant 3c_2$ jest prawdziwa dla powierzchni ogólnego typu. Od czasu udowodnienia jej uogólniono ją na szereg szczególnych przypadków. Ostatnio A. Langer udowodnił wersję dla powierzchni normalnej z dywizorem brzegowym. W niniejszej pracy wykorzystano ją aby poprawić znane wyniki, korzystające z wcześniejszych wersji tej nierówności.

Słowa kluczowe

Orbifoldowa charakterystyka Eulera, Nierówność Bogomolova-Miyaoki-Yau, Osobliwości krzywych, Układy linii

Klasyfikacja tematyczna

14H50
14J17
14N20

Spis treści

0. Podstawowe pojęcia **6**

1. Lokalne orbifoldowe charakterystyki Eulera dla prostych osobliwości. **9**

2. Układy linii na $\mathbb{P}^2$ **15**

3. Układy stożkowych na $\mathbb{P}^2$ **22**

Wstęp

Dla dowolnej gładkiej powierzchni X ogólnego typu prawdziwa jest nierówność Bogomolova-Miyaoki-Yau

$$c_1^2 \leqslant 3c_2,$$

gdzie c_1 i c_2 są klasami Cherna wiązki stycznej. Wiadomo, że c_1^2 jest samoprzecięciem dywizora kanonicznego, a c_2 to topologiczna charakterystyka Eulera. Słabsza wersja tej nierówności: $c_1^2 \leqslant 4c_2$ została udowodniona przez F. A. Bogomolova w [**Bo**]. Później mocniejszą wersję tej nierówności udowodnili niezależnie od siebie i używając zupełnie różnych metod Y. Miyaoka [**Mi1**] i S. T. Yau [**Ya**]. Yau pokazał ponadto, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy nakryciem uniwersalnym X jest kula jednostkowa. Nierówność tę uogólniano na różne klasy powierzchni. F. Sakai [**Sa1**] udowodnił odpowiednik tej nierówności dla gładkiej powierzchni z dywizorem Weila, który ma co najwyżej normalne przecięcia. Później Y. Miyaoka [**Mi2**] uogólnił tę nierówność do powierzchni z osobliwościami ilorazowymi z dywizorem Weila. Później ta nierówność była uogólniona przez R. Kobayashiego (zob. [**K1**]) do powierzchni orbifoldowych z tzw. dywizorem ułamkowym (tj. ze współczynnikami postaci $1-\frac{1}{n}$) i logarytmicznym wymiarem Kodairy 2, oraz przez G. Megyesiego [**Me**] do powierzchni z nieujemnym logarytmicznym wymiarem Kodairy. Więcej informacji na temat historii nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau i odnośniki do innych prac na ten temat można znaleźć w [**Mi3**] i [**La**]. Niedawno A. Langer [**La**] udowodnił wersję nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau dla powierzchni normalnych z dowolnym dywizorem brzegowym. Niniejsza praca jest próbą poprawienia wyników otrzymanych w przeszłości przy pomocy wcześniejszych wersji nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau.

W rozdziale 0 wprowadzamy podstawowe pojęcia, między innymi orbifoldowej charakterystyki Eulera dla normalnej powierzchni z $\mathbb{Q}$-dywizorem, która jest konieczna do sformułowania uogólnionej nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau. Przytaczamy w nim też kilka twierdzeń przydatnych w dalszej części tej pracy. Na koniec tego rozdziału formułujemy uogólnioną nierówność Bogomolova-Miyaoki-Yau.

Rozdział 1 poświęcony jest obliczeniu lokalnej orbifoldowej charakterystyki Eulera dla prostych osobliwości. Jako wniosek udowadniamy nierówność Bogomolova-Miyaoki-Yau dla krzywej płaskiej z co najwyżej prostymi osobliwościami.

W rozdziale 2 zajmujemy się układami prostych na $\mathbb{P}^2$. Poprawiamy w nim wynik F. Hirzebrucha dotyczący krotności i liczby punktów przecięcia układu prostych na płaszczyźnie.

Rozdział 3 poświęcony jest układom stożkowych na $\mathbb{P}^2$. Udowadniamy w nim oszacowanie liczby punktów styczności stożkowych z układu, a jako wniosek dowodzimy, że pewne układy nie istnieją.

0. Podstawowe pojęcia

W tej części zdefiniujemy orbifoldową charakterystykę Eulera dla powierzchni z $\mathbb{Q}$-dywizorem i użyjemy jej do sformułowania uogólnionej nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau. Wcześniej jednak wprowadzimy notację, której będziemy używać w dalszej części tej pracy. Wszystkie rozmaitości, które będziemy rozważać, będą określone nad ciałem liczb zespolonych. Niech X będzie powierzchnią normalną, rzutową. Grupa dywizorów Weila modulo relacja liniowej równoważności będzie oznaczana przez $\operatorname{Weil} X$. $\mathbb{Q}$-dywizorem nazywamy elementy grupy $\operatorname{Weil} X \otimes \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$-dywizor $D = \sum d_i D_i$, gdzie D_i są różnymi dywizorami pierwszymi, nazywamy *brzegiem*, jeśli dla wszystkich i mamy $0 \leqslant d_i \leqslant 1$. Jeśli ponadto wszystkie d_i są postaci $1 - \frac{1}{m}$, to D nazywamy *brzegiem ułamkowym*. Jeśli $f\colon X \to Y$ jest przekształceniem biwymiernym, to definiujemy *obraz prosty* $f_*\colon \operatorname{Weil} X \to \operatorname{Weil} Y$ jako $\mathbb{Z}$-liniowe odwzorowanie takie, że dla każdej nierozkładalnej i zredukowanej krzywej C na X, $f_*C = 0$ jeśli C jest zawarte w zbiorze wyjątkowym f, a $f_*C = f(C)$ w przeciwnym przypadku. Dla $\mathbb{Q}$-dywizora D definiujemy *cofnięcie* f^*D jako

$$f^*D = f^{-1}D + \sum a_i E_i,$$

gdzie $f^{-1}D$ oznacza ścisły przeciwobraz D, E_i są dywizorami wyjątkowymi, a liczby a_i są wyznaczone jednoznacznie przez układ równań $f^{-1}DE_j + \sum_i a_i E_i E_j = 0$ dla wszystkich j. Przecięcie dwóch $\mathbb{Q}$-dywizorów D_1 i D_2 na powierzchni normalnej X definiujemy jako $D_1.D_2 = \pi^*D_1.\pi^*D_2$, gdzie π jest pewnym rozwiązaniem osobliwości powierzchni X. Ta definicja nie zależy od wyboru π. Więcej szczegółów można znaleźć m.in. w [**Sa2**]. Rozwiązanie osobliwości $f\colon \widetilde{X} \to X$ nazywamy *log rozwiązaniem* pary (X, D) jeśli dywizor wyjątkowy i ścisły przeciwobraz D mają tylko normalne przecięcia. Niech E_i oznaczają dywizory wyjątkowe przekształcenia f. Wówczas istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby wymierne a_i takie, że

$$K_{\widetilde{X}} + f^{-1}D + \sum E_i = f^*(K_X + D) + \sum a_i E_i. \tag{0.1}$$

Parę $(X, D = \sum d_i D_i)$, gdzie X jest normalną powierzchnią, a D brzegiem, nazywamy *log kanoniczną*, jeśli dla każdego log rozwiązania $f\colon \widetilde{X} \to X$ pary (X, D) wszystkie liczby a_i ze wzoru (0.1) są nieujemne. $\mathbb{Q}$-dywizor D nazywamy *numerycznie efektywnym (nef)*, jeśli $DC \geqslant 0$ dla każdej zredukowanej krzywej C. $\mathbb{Q}$-dywizor D nazywamy *pseudoefektywnym*, jeśli $DP \geqslant 0$ dla każdego numerycznie efektywnego dywizora P. Orbifoldowa charakterestyka Eulera była definiowana dla quasirzutowych rozmaitości z jedynie izolowanymi osobliwościami ilorazowymi, ale także dla log kanonicznych par złożonych z normalnej powierzchni i zredukowanego dywizora Weila, lub ogólniej powierzchni z brzegiem ułamkowym. Przy pomocy lokalnych niezmienników zdefiniujemy orbifoldową charakterestykę Eulera dla dowolnej pary złożonej z normalnej powierzchni i $\mathbb{Q}$-dywizora.

Definicja 0.1 *Niech X będzie powierzchnią normalną, rzutową z $\mathbb{Q}$-dywizorem $D = \sum_i a_i D_i$.* Orbifoldową charakterestykę Eulera *pary (X, D) definiujemy wzorem:*

$$e_{orb}(X, D) = e_{top}(X - \operatorname{Sing} X - \operatorname{Supp} D) + \sum_i (1 - a_i) e_{top}(D_i - \operatorname{Sing}(X, D)) + \sum_{x \in \operatorname{Sing}(X, D)} e_{orb}(x; X, D)$$

lub równoważnie:

$$e_{orb}(X, D) = e_{top}(X) - \sum_i a_i e_{top}(D_i - \operatorname{Sing}(X, D)) + \sum_{x \in \operatorname{Sing}(X, D)} (e_{orb}(x; X, D) - 1)$$

Liczbę $e_{orb}(x; X, D)$ nazywamy lokalną orbifoldową charakterystyką Eulera w punkcie x. Nie będziemy jej jednak definiować, ponieważ definicja jest dosyć skomplikowana i nie będzie nam do niczego potrzebna. Lokalna orbifoldowa charakterystyka Eulera ma następujące własności:

1. $e_{orb}(x; X, D)$ zależy jedynie od typu analitycznego (X, D) w punkcie x.
2. Jeśli (X, x) nie jest osobliwością ilorazową , a para (X, D) jest log kanoniczna w punkcie x to $e_{orb}(x; X, D) = 0$.
3. Jeśli para $(\mathbb{C}^2, D)$ jest log kanoniczna w 0, a $\mathrm{mult}_0 D$ oznacza krotność D w 0 (czyli sumę krotności nierozkładalnych składników D_i branych z odpowiednimi współczynnikami), to
$$e_{orb}(0; \mathbb{C}^2, D) \leqslant \Big(1 - \frac{1}{2}\mathrm{mult}_0 D\Big)^2.$$

Definicja lokalnej orbifoldowej charakterystyki Eulera oraz dowody tych faktów i innych twierdzeń podanych w tym rozdziale znajdują się w pracy A. Langera [**La**]. Teraz podamy twierdzenia pozwalające policzyć lokalną orbifoldową charakterystykę Eulera w pewnych przypadkach. Zaczniemy od twierdzenia dotyczącego zwyczajnych (ang.: ordinary) osobliwości. Ponieważ lokalna orbifoldowa charakterystyka Eulera jest niezmiennikiem analitycznym sformułujemy je w przypadku linii na $\mathbb{C}^2$.

Twierdzenie 0.2 *Niech $L_1, \ldots, L_n$ będą różnymi liniami w $\mathbb{C}^2$ przechodzącymi przez 0. Niech $D = \sum_{i=1}^n a_i L_i$, gdzie $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant 1$, oraz $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i$. Wówczas*

$$e_{orb}(0; \mathbb{C}^2, D) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \alpha > 2 \text{ (przypadek nie log kanoniczny),} \\ (1 - a + a_n)(1 - a_n), & \text{jeśli } 2a_n \geqslant \alpha, \end{cases}$$

oraz

$$e_{orb}(0; \mathbb{C}^2, D) \leqslant (1 - \tfrac{1}{2}a)^2, \quad \text{jesli } 2a_n < \alpha \leqslant 2. \tag{0.2}$$

Ponadto, jeśli $n = 3$, to w (0.2) mamy równość.

Gotowe wzory na lokalną orbifoldową charakterystykę Eulera mamy również w przypadku ilorazów $\mathbb{C}^2$ przez unitarne podgrupy $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$. Zanim podamy twierdzenia wprowadzimy pewne oznaczenia. Niech n bedzie liczbą naturalną, $1 \leqslant q < n$ liczbą względnie pierwszą z n, a ϵ n-tym prymitywnym pierwiastkiem z jedynki. Minimalne rozwiązanie cyklicznej osobliwości ilorazowej $(\mathbb{A}^2, 0)/\mathbb{Z}_n$, $(x, y) \to (\epsilon x, \epsilon^q y)$ składa się z łańcucha gładkich krzywych wymiernych $E_1, \ldots, E_k$ z samoprzecięciami odpowiednio $-b_1, -b_2, \ldots, -b_k$, gdzie liczby b_i są wyznaczone przez ułamek łańcuchowy

$$\frac{n}{q} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - \ldots}}.$$

Powiemy, że taki łańcuch jest typu $\langle n, q\rangle$, przy czym $\langle 1, 0\rangle$ oznacza łańcuch pusty, a $\langle 1, 1\rangle$ pojedynczą krzywą z samoprzecięciem -1. Powiemy, że minimalne log rozwiązanie osobliwosci (X, D, x) jest typu $\langle n, q; *\rangle$, jeśli krzywe wyjątkowe tworzą łańcuch typu $\langle n, q\rangle$, a D ma co najwyżej jeden nierozkładalny składnik (ozn. $*$) przecinający pierwszą krzywą w łańcuchu. Powiemy, że jest typu $\langle n, q; *_1, *_2\rangle$, jeśli krzywe wyjątkowe tworzą łańcuch typu $\langle n, q\rangle$, a D ma co najwyżej dwa nierozkładalne składniki ($*_1$ i $*_2$) przecinające pierwszą

i ostatnią krzywą w łańcuchu. Minimalne log rozwiązanie osobliwości (X, D, x) jest typu $\langle b; \langle n_1, q_1; *_1\rangle, \langle n_2, q_2; *_2\rangle, \langle n_3, q_3; *_3\rangle\rangle$, jeśli składa się z wymiernej krzywej o samoprzecięciu $-b$ i trzech łańcuchów typu $\langle n_i, q_i; *_i\rangle$ przyłączonych do niej.

Przy takich oznaczeniach prawdziwe są następujące twierdzenia (zob. [**La**]):

Twierdzenie 0.3 *Załóżmy, że minimalne log rozwiązanie osobliwości $(X, D = \sum \alpha_i D_i, x)$ jest typu $\langle b; \langle n_1, q_1; *_1\rangle, \langle n_2, q_2; *_2\rangle, \langle n_3, q_3; *_3\rangle\rangle$. Niech α_1, α_2 i α_3 będą współczynnikami przy składnikach odpowiadających $*_1$, $*_2$ i $*_3$. Połóżmy*

$$\beta = \min\{\tfrac{1-\alpha_i}{n_i}\}, \quad \gamma = \textstyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1-\alpha_i}{n_i} \quad \textit{oraz} \quad \delta = \sum \frac{q_i}{n_i}.$$

Wówczas

$$e_{orb}(x; X, D) = \begin{cases} 0 & \textit{dla} \quad \gamma < 1 \qquad \textit{(przypadek nie log kanoniczny)}, \\ \frac{(\gamma-1)^2}{4\delta} & \textit{dla} \quad 1 \leqslant \gamma < 2\beta + 1, \\ \frac{(\gamma-1-\beta)\beta}{\delta} & \textit{dla} \quad \gamma \geqslant 2\beta + 1. \end{cases} \tag{0.3}$$

Wniosek 0.4 *Załóżmy, że minimalne log rozwiązanie osobliwości $(X, D = \sum d_i D_i, x)$ jest typu $\langle n, q; *_1, *_2\rangle$. Niech d_1 i d_2 są współczynnikami przy składnikach odpowiadających $*_1$ i $*_2$. Wówczas*

$$e_{orb}(x; X, D) = \frac{(1-d_1)(1-d_2)}{n}$$

Teraz podamy główne twierdzenie, z którego będziemy korzystać w dalszej części tej pracy.

Twierdzenie 0.5 (Nierówność Bogomolova-Miyaoki-Yau) *Niech X będzie normalną rzutową powierzchnią z dywizorem brzegowym $D = \sum a_i D_i$. Załóżmy, że para (X, D) jest log kanoniczna i dywizor $K_X + D$ jest pseudoefektywny. Wówczas*

$$3e_{orb}(X, D) \geqslant (K_X + D)^2. \tag{0.4}$$

Co więcej, jeśli zachodzi równość to $K_X + D$ jest nef.

Uwaga. Jeśli pewna krotność dywizora C jest efektywna, to oczywiście C jest pseudoefektywny. Implikacja w drugą stronę zazwyczaj nie jest prawdziwa. Prawdą jest jednak, że jeśli $K_X + D$ jest nef i para (X, D) jest log kanoniczna, to pewna krotność $K_X + D$ jest efektywna (zob. [**Ko**, Theorem 11.1.3]).

1. Lokalne orbifoldowe charakterystyki Eulera dla prostych osobliwości.

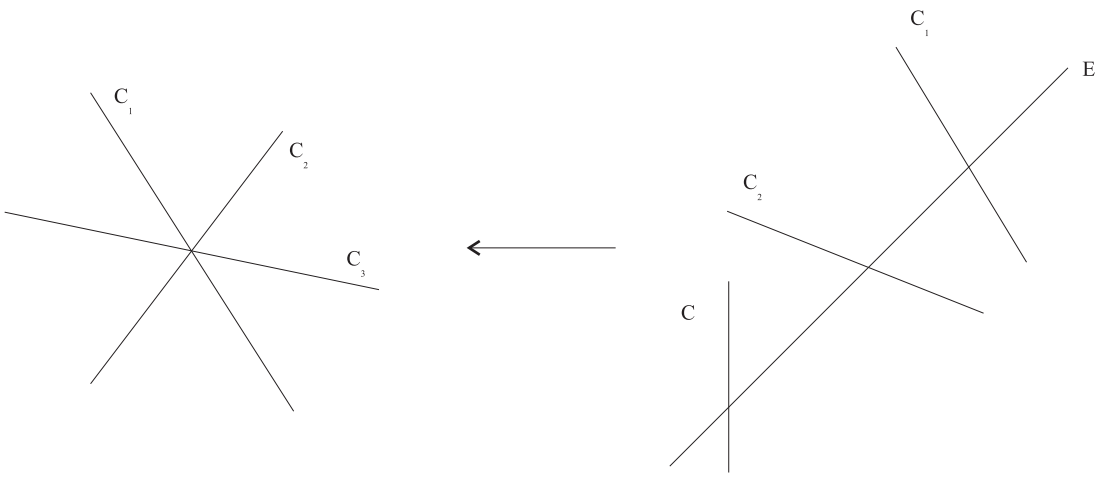
W tej części zobrazujemy twierdzenia dotyczące osobliwości ilorazowych na przykładzie prostych osobliwości krzywych. Przypomnijmy (zob. np. [**BPV**]), że osobliwości proste, czyli typu $A - D - E$ są lokalnie zadane równaniami

$$\begin{array}{lll} A_n: & x^2 + y^{n+1} = 0 & n \geqslant 1 \\ D_n: & x^2 y + y^{n-1} = 0 & n \geqslant 4 \\ E_6: & x^3 + y^4 = 0 & \\ E_7: & x^3 + xy^3 = 0 & \\ E_8: & x^3 + y^5 = 0 & \end{array} \tag{1.1}$$

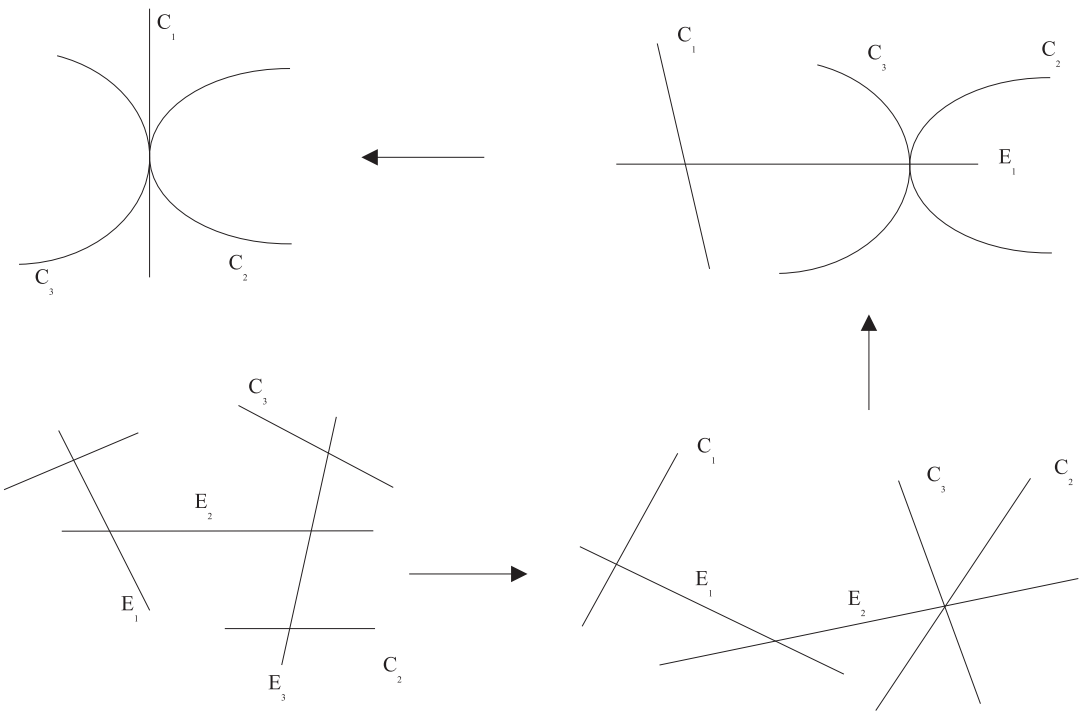
Chcemy skorzystać z twierdzenia 0.3. W tym celu musimy przyjrzeć się rozwiązaniom tych osobliwości. Osobliwość typu A_1 to punkt transwersalnego przecięcia się dwóch gładkich składowych analitycznych. Do rozwiązania tej osobliwości wystarczy jedno rozdmuchanie, które jest log rozwiązaniem. Możemy też obliczyć jej lokalną orbifoldową charakterystykę Eulera korzystając z twierdzenia 0.2. Zachowanie się innych osobliwości prostych przy pojedynczym rozdmuchaniu przedstawia następująca tabelka

osobliwość	A_2	$A_n,\ n \geqslant 3$	D_4	D_5	$D_n,\ n \geqslant 6$	E_6	E_7	E_8
po rozdmuchaniu	A_3	D_{n+1}	$3A_1$	$A_1,\ A_3$	$A_1,\ D_{n-2}$	A_5	D_6	E_7

Na rysunkach poniżej przedstawiono rozwiązania osobliwości typu D_4:

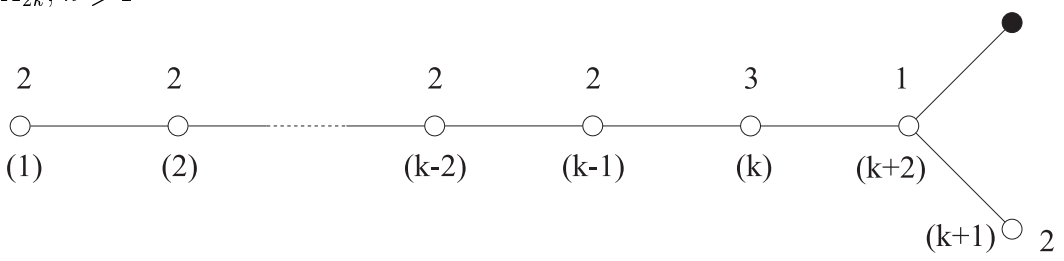


oraz D_5:

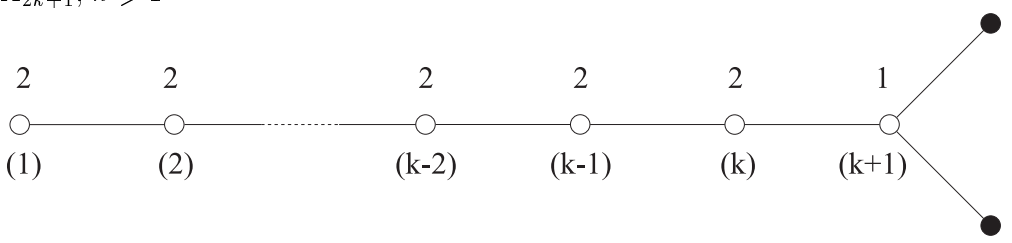


Pozostałe rodzaje osobliwości prostych po pewnej liczbie rozdmuchań sprowadzają się do jednego z tych dwóch typów. Zauważmy ponadto, że krzywe wyjątkowe otrzymane w trakcie tego procesu mają samoprzecięcia -2. Dzięki powyższym obserwacjom możemy narysować diagramy log-rozwiązań osobliwości prostych.

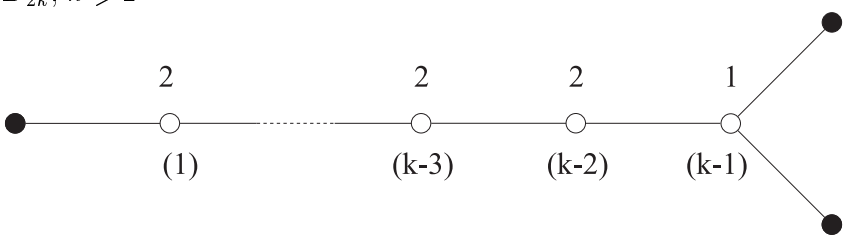
A_{2k}, $k \geqslant 1$



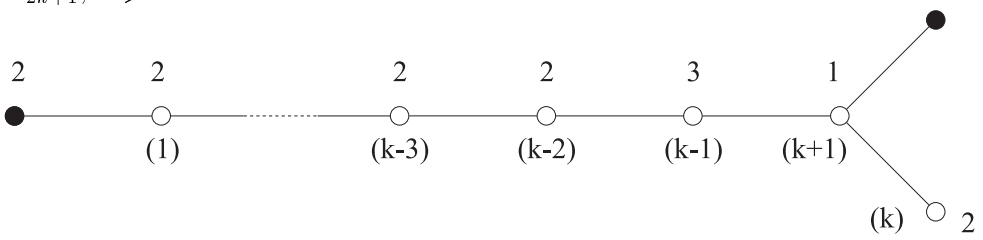
A_{2k+1}, $k \geqslant 1$



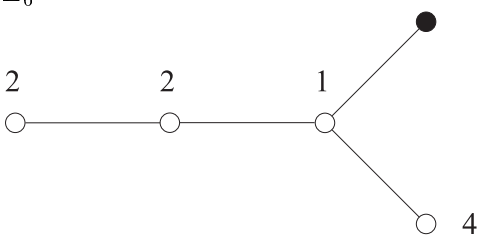
D_{2k}, $k \geqslant 2$



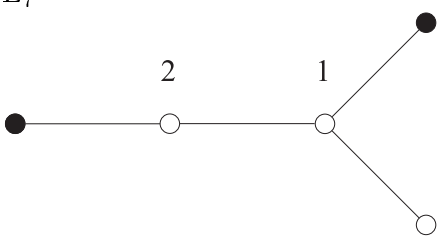
D_{2k+1}, $k \geqslant 2$



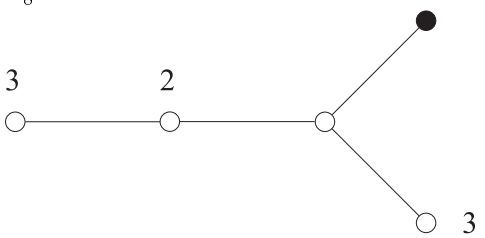
E_6



E_7



E_8



Rysunek 1: $\circ$ oznacza krzywą wyjątkową, a $\bullet$ składową ścisłego przeciwobrazu krzywej. Liczby $1, 2, 3, 4$ oznaczają liczbę przeciwną do samoprzecięcia krzywej, a liczby w nawiasach oznaczają kolejność krzywych wyjątkowych otrzymywanych w trakcie rozwiązywania osobliwości.

Stąd widać, że wszystkie osobliwości proste są typu $\langle 1; \langle n_1, q_1; *_1\rangle, \langle n_2, q_2; *_2\rangle, \langle n_3, q_3; *_3\rangle\rangle$, dla pewnych n_i, q_i. Załóżmy, że krzywa C na $\mathbb{C}^2$ w okolicy zera zadana jest jednym z równań

(1.1). Wówczas krzywa ta ma w punkcie 0 osobliwość typu odpowiednio A_n, D_n, E_6, E_7, E_8. W poniższej tabeli znajdują się lokalne orbifoldowe charakterystyki Eulera osobliwości pary $(\mathbb{C}^2, \alpha C)$ w punkcie 0, w zależności od współczynnika α.

Osobliwość	Równanie	μ_0	Typ	$e_{orb}(0; \mathbb{C}^2, \alpha C)$
A_1	$x^2 + y^2$	1	$\langle 1, 1; *_1, *_2 \rangle$	$(1-\alpha)^2$
A_{2k}, $k \geqslant 1$	$x^2 + y^{2k+1} = 0$	$2k$	$\langle 1; \langle 2k+1, k \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 0; * \rangle \rangle$	$1-2\alpha$ $\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2k-1}{4k+2}$ $\frac{(2k+3-(4k+2)\alpha)^2}{8(2k+1)}$ $\quad \frac{2k-1}{4k+2} < \alpha \leqslant \frac{2k+3}{4k+2}$ 0 $\quad \alpha > \frac{2k+3}{4k+2}$
A_{2k+1}, $k \geqslant 1$	$x^2 + y^{2k+2} = 0$	$2k+1$	$\langle 1; \langle k+1, k \rangle, \langle 1, 0; *_1 \rangle, \langle 1, 0; *_2 \rangle \rangle$	$1-2\alpha$ $\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{k}{2k+2}$ $\frac{(k+2-2(k+1)\alpha)^2}{4(k+1)}$ $\quad \frac{k}{2k+2} < \alpha \leqslant \frac{k+2}{2k+2}$ 0 $\quad \alpha > \frac{k+2}{2k+2}$
D_{2k}, $k \geqslant 2$	$x^2y + y^{2k-1} = 0$	$2k$	$\langle 1; \langle k-1, k-2; *_1 \rangle, \langle 1, 0; *_2 \rangle, \langle 1, 0; *_3 \rangle \rangle$	$(1-2\alpha)(1-\alpha)$ $\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{k-2}{2k-3}$ $\frac{(k-(2k-1)\alpha)^2}{4(k-1)}$ $\quad \frac{k-2}{2k-3} < \alpha \leqslant \frac{k}{2k-1}$ 0 $\quad \alpha > \frac{k}{2k-1}$
D_{2k+1}, $k \geqslant 2$	$x^2y + y^{2k} = 0$	$2k$	$\langle 1; \langle 2k-1, k-1; *_1 \rangle, \langle 1, 0; *_2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \rangle$	$(1-2\alpha)(1-\alpha)$ $\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2k-3}{4k-4}$ $\frac{(1-2k\alpha)^2}{8(2k-1)}$ $\quad \frac{2k-3}{4k-4} < \alpha \leqslant \frac{2k+1}{4k}$ 0 $\quad \alpha > \frac{2k+1}{4k}$
E_6	$x^3 + y^4 = 0$	6	$\langle 1; \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 1, 0; * \rangle \rangle$	$1-3\alpha$ $\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{12}$ $\frac{(7-12\alpha)^2}{48}$ $\quad \frac{1}{12} < \alpha \leqslant \frac{7}{12}$ 0 $\quad \alpha > \frac{7}{12}$
E_7	$x^3 + xy^3 = 0$	7	$\langle 1; \langle 2, 1; *_1 \rangle, \langle 1, 0; *_2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \rangle$	$1-3\alpha$ $\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{9}$ $\frac{(5-9\alpha)^2}{24}$ $\quad \frac{1}{9} < \alpha \leqslant \frac{5}{9}$ 0 $\quad \alpha > \frac{5}{9}$
E_8	$x^3 + y^5$	8	$\langle 1; \langle 5, 2 \rangle, \langle 2, q_2; *_2 \rangle, \langle n_3, q_3; *_3 \rangle \rangle$	$1-3\alpha$ $\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{5}$ $\frac{(8-15\alpha)^2}{60}$ $\quad \frac{2}{15} < \alpha \leqslant \frac{8}{15}$ 0 $\quad \alpha > \frac{8}{15}$

Tabela 1: Liczby Milnora (μ_0), typy i lokalne orbifoldowe charakterystyki Eulera osobliwości prostych

W przypadku, gdy $e_{orb}(0; \mathbb{C}^2, \alpha C) = 0$ osobliwość w 0 nie jest log kanoniczna. Przypomnijmy, że *liczbę Milnora* w punkcie p krzywej C na gładkiej powierzchni X definiujemy jako

$$\mu_p(C) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,p} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2} \right).$$

W powyższym wzorze z_1 i z_2 są lokalnymi współrzędnymi, a C w otoczeniu p zadana jest równaniem $f(z_1, z_2) = 0$.

Dla przykładu policzymy $e_{orb}(0;\mathbb{C}^2,\alpha C)=0$ dla osobliwości typu D_{2k}, dla $k\geqslant 2$. Niech krzywa C będzie zadana w otoczeniu zera równaniem $x^2y+y^{2k-1}=0$. Chcemy obliczyć $e_{orb}(0;\mathbb{C}^2,\alpha C)$. Z rysunku 1 widzimy, że jedyny nietrywialny łańcuch w rozwiązaniu osobliwości krzywej C w 0 złożony jest z $k-2$ krzywych, z których każda ma samoprzecięcie -2. W ten sposób dostajemy łańcuch typu $\langle k-1,k-2\rangle$. Osobliwość jest więc typu $\langle 1;\langle k-1,k-2;*_1\rangle,\langle 1,0;*_2\rangle,\langle 1,0;*_3\rangle\rangle$. Przy oznaczeniach twierdzenia 0.3 mamy

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\alpha_2=\alpha_3=\alpha,\\ \beta&=\frac{1-\alpha}{k-1},\\ \gamma&=1-\alpha+1-\alpha+\frac{1-\alpha}{k-1}=\frac{(2k-1)(1-\alpha)}{k-1},\\ \delta&=1-\frac{k-2}{k-1}=\frac{1}{k-1}.\end{aligned}$$

Pozostaje podstawić to do (0.3) i przekształcić, tak aby $e_{orb}(0;\mathbb{C}^2,\alpha C)$ zależała od α, a nie od γ. Analogicznie postępujemy z pozostałymi typami osobliwości, ale obliczenia mogą być trochę bardziej skomplikowane.

Przyjrzyjmy się teraz krzywym płaskim z co najwyżej prostymi osobliwościami. Zaczniemy od ogólniejszej uwagi. Niech C będzie krzywą na gładkiej powierzchni X. Wówczas

$$e_{top}(C)=-(K_X+C)C+\sum_{p\in\mathrm{Sing}C}\mu_p$$

(zobacz np. [**BK**]). Jeśli para $(X,\alpha C)$ spełnia założenia twierdzenia 0.5 to nierówność (0.4) możemy przepisać następująco

$$\sum_{p\in\mathrm{Sing}C}3(\alpha(\mu_p-1)+1-e_{orb}(p;X,\alpha C))\leqslant 3e_{top}(X)-K_X^2+\alpha K_XC+(3\alpha-\alpha^2)C^2.$$

Jeśli za X weźmiemy $\mathbb{P}^2$, to dostaniemy następujący

Wniosek 1.1 *Niech C będzie krzywą stopnia d na $\mathbb{P}^2$, z co najwyżej prostymi osobliwościami. Wówczas dla dowolnego $\frac{3}{d}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ mamy*

$$\sum_{p\in\mathrm{Sing}C}3\left(\alpha(\mu_p-1)+1-e_{orb}(p;\mathbb{P}^2,\alpha C)\right)\leqslant(3\alpha-\alpha^2)d^2-3\alpha d \tag{1.2}$$

Dowód. Jest to przepisana poprzednia nierówność dla $X=\mathbb{P}^2$. Dolne ograniczenie na α zapewnia nam, że pewna krotność $K_X+\alpha C$ jest efektywna. Górne ograniczenie gwarantuje, że wszystkie osobliwości pary $(\mathbb{P}^2,\alpha C)$ są log kanoniczne, c.n.d.

□

Wniosek 1.1 jest uogólnieniem [**K2**, Corollary 2], który to wniosek można otrzymać z wniosku 1.1 biorąc $\alpha=\frac{1}{2}$ i zauważając, że $e_{orb}(p;\mathbb{P}^2,\frac{1}{2}C)=\frac{1}{|\Gamma_p|}$. Na koniec tego rozdziału, jako przykład zastosowania wniosku 1.1, oszacujemy maksymalną liczbę osobliwości typu D_4 na krzywej z co najwyżej prostymi osobliwościami. Z tablicy 1 wynika, że jeśli krzywa C na $\mathbb{P}^2$ ma w punkcie p osobliwość typu D_4, to

$$\mu_p=4,\quad e_{orb}(p;\mathbb{P}^2,\alpha C)=\tfrac{(2-3\alpha)^2}{4},$$

dla $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{2}{3}$.

Niech teraz krzywa C stopnia $d \geqslant 6$ na $\mathbb{P}^2$ ma co najwyżej proste osobliwości i niech t oznacza liczbę osobliwości typu D_4 na C. Wszystkie składniki sumy po prawej stronie nierówności 1.2 są nieujemne, więc mamy następujące szacowanie:

$$3\left(3\alpha+1-\frac{(2-3\alpha)^2}{4}\right)t \leqslant \sum_{p\in \mathrm{Sing}C} 3\big(\alpha(\mu_p-1)+1-e_{orb}(p;\mathbb{P}^2,\alpha C)\big) \leqslant (3\alpha-\alpha^2)d^2-3\alpha d.$$

Przekształcając tę nierówność dostajemy, że

$$t \leqslant \frac{12d(d-1)-4\alpha d^2}{72-27\alpha}, \tag{1.3}$$

dla każdego α takiego, że $\frac{3}{d} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Łatwo sprawdzić, że wyrażenie po prawej stronie nierówności (1.3) dla $d = 6, 7$ maleje wraz ze wzrostem współczynnika α, dla $d > 9$ rośnie kiedy rośnie współczynnik α, a dla $d = 9$ nie zależy od α i równa się 12. Połóżmy więc

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } \ d = 6,7,8,9, \\ \frac{3}{d} & \text{dla } \ d > 9. \end{cases}$$

Wówczas otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek 1.2 *Załóżmy, że krzywa C stopnia $d \geqslant 6$ na $\mathbb{P}^2$ ma co najwyżej proste osobliwości. Niech t oznacza liczbę osobliwości tej krzywej typu D_4. Wówczas dla $d = 6, 7, 8, 9$*

$$t \leqslant \frac{20}{117}d^2 - \frac{8}{39}d,$$

a dla $d \geqslant 10$

$$t \leqslant \frac{4d^2(d-2)}{24d-27}.$$

Oznaczmy przez $t(d)$ maksymalną możliwą liczbę osobliwości typu D_4 na krzywej stopnia d z co najwyżej prostymi osobliwościami. Z wniosku 1.2 wynika, że

$$\limsup_{d\to\infty} \frac{t(d)}{d^2} \leqslant \frac{1}{6}$$

Jest to wynik lepszy od otrzymanego przez zastosowanie [**K2**, Corollary 2].

2. Układy linii na $\mathbb{P}^2$

Punktem wyjścia do rozważań zawartych w tym rozdziale jest praca F. Hirzebrucha [**Hi1**]. Rozpatrzmy zespoloną powierzchnię rzutową $\mathbb{P}^2$ ze współrzędnymi jednorodnymi $[z_0 : z_1 : z_2]$. *Układem k linii* nazywamy krzywą rozkładalną

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_k,$$

gdzie $L_1, L_2, \ldots, L_k$ są liniami na $\mathbb{P}^2$. Mogą być one zadane odpowiednio równaniami $l_1 = 0, l_2 = 0, \ldots, l_k = 0$, gdzie l_i są formami liniowymi od z_0, z_1, z_2. Wówczas L jest dana równaniem $l_1 l_2 \ldots l_k = 0$. Jeśli współczynniki wszystkich form l_i są rzeczywiste, to dostajemy układ rzeczywisty. Z drugiej strony każdy układ rzeczywisty możemy traktować jak zespolony.

Oznaczmy, za Hirzebruchem, przez t_r $(r \geqslant 2)$ liczbę punktów r-krotnych, tzn. liczbę punktów leżących na dokładnie r liniach układu. Wówczas mamy równość

$$\frac{k(k-1)}{2} = \sum_{r \geqslant 2} t_r \frac{r(r-1)}{2}. \tag{2.1}$$

Dla punktu $p \in \mathbb{P}^2$ przez r_p oznaczmy jego *krotność*, czyli liczbę linii układu zawierających ten punkt.

Dla dowolnego układu i liczby $n \geqslant 2$, Hirzebruch rozważa nakrycie $X \to \mathbb{P}^2$ rozgałęzione wzdłuż L. Powierzchnia X zazwyczaj nie jest gładka, ale można rozwiązać jej osobliwości, otrzymując gładką powierzchnię Y. Hirzebruch pokazuje, że przy odpowiednich założeniach dotyczących układu L i liczby n, powierzchnia Y jest powierzchnią ogólnego typu. W tych przypadkach stosuje on "klasyczną" nierówność Bogomolova-Miyaoki-Yau, dostając następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.1 ([Hi1, Theorem 3.1]) *Dla każdego układu k linii na $\mathbb{P}^2$ takiego, że $t_k = t_{k-1} = t_{k-2} = 0$, mamy*

$$t_2 + t_3 \geqslant k + t_5 + 2t_6 + 3t_7 + \ldots$$

W innej pracy [**Hi2**] poprawił ten wynik. Mianowicie pokazał, że taki układ spełnia nierówność

$$t_2 + \frac{3}{4} t_3 \geqslant k + \sum_{r \geqslant 5} (2r - 9) t_r \tag{2.2}$$

Celem tego rozdziału jest udowodnienie ciągu podobnych nierówności przy różnych założeniach. Dokładniej pokażemy, że zmniejszając liczbę r dla której $t_r = t_{r+1} = \ldots = t_k = 0$, możemy otrzymać nawet lepsze nierówności, w szczególności poprawimy nierówność (2.2). Jako pierwszą udowodnimy nierówność przy "skrajnie mocnych" założeniach. Następujący fakt został podany w [**La**] w trochę innej formie.

Lemat 2.2 *Niech $L = L_1 + \ldots + L_k$ będzie układem k linii na $\mathbb{P}^2$. Jeśli $t_r = 0$ dla $r > \frac{2}{3}k$ to*

$$t_2 + \frac{3}{4} t_3 \geqslant k + \sum_{r \geqslant 5} \left(\frac{r^2}{4} - r \right) t_r \tag{2.3}$$

Dowód. Stosujemy twierdzenie 0.5 do pary $(\mathbb{P}^2, aL)$. Z założeń wynika, że istnieje takie a, że para jest log kanoniczna i pewna krotność $K_{\mathbb{P}^2} + aL$ jest efektywna. Wystarczy wziąć dowolne a takie, że $\frac{3}{k} \leqslant a \leqslant \frac{2}{r_{max}}$, gdzie r_{max} oznacza maksymalną liczbę lini przecinających się w jednym punkcie. Żeby uzyskać nierówność w podanej wyżej postaci korzystamy z równości (2.1). □

W dalszej części tego rozdziału pokażemy, że prawdziwe są podobne nierówności przy słabszych założeniach dotyczących układu. Mianowicie udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.3 *Niech $L = L_1 + \ldots + L_k$ będzie układem k linii na $\mathbb{P}^2$ i niech $3 \leqslant n < k$ będzie liczbą naturalną. Załóżmy, że $t_r = 0$ dla $r > k - n + 1$. Wówczas*

$$t_2 + \frac{3}{4}t_3 \geqslant k + \sum_{r=4}^{s-1}\Big(\frac{r^2}{4} - r\Big)t_r + \sum_{r=s}^{k-n}\big((n-1)r - n^2\big)t_r + \sum_{r>k-n}\big((n-2)r - (n-1)^2\big)t_r, \quad (2.3\ n)$$

gdzie $s = \min\{2n,\, k-n\}$.

Zaczniemy od ogólnych rozważań dotyczących rozdmuchań układów linii. Niech dla ustalonej liczby naturalnej $m \geqslant 3$ $\sigma\colon \widehat{\mathbb{P}}^2_m \to \mathbb{P}^2$ będzie rozdmuchaniem $\mathbb{P}^2$ we wszystkich punktach krotności $\geqslant m$. Zauważmy, że σ faktoryzuje się przez $\widehat{\mathbb{P}}^2_m = X_n \to X_{n-1} \to \ldots \to X_1 \to X_0 = \mathbb{P}^2$, gdzie X_j jest rozdmuchaniem X_{j-1} w jednym punkcie. Niech E_p oznacza krzywą wyjątkową otrzymaną z rozdmuchania punktu p. Wówczas z odpowiednich faktów dotyczących zachowania się dywizora kanonicznego, dywizorów efektywnych i teorii przecięć przy pojedynczym rozdmuchaniu gładkiej powierzchni (zob. np. [**Ha**, V.3]) dostajemy

$$K_{\widehat{\mathbb{P}}^2_m} = \sigma^* K_{\mathbb{P}^2} + \sum_{\substack{p\in L\\ r_p\geqslant m}} E_p. \qquad \text{(z [\textbf{Ha}, V.3.3])}$$

Jeśli przez $\widetilde{L}_i, \widetilde{L}$ oznaczymy ścisłe przeciwobrazy odpowiednich krzywych to

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_i &= \sigma^* L_i - \sum_{\substack{p\in L_i\\ r_p\geqslant m}} E_p,\\ \widetilde{L} &= \sum_{i=1}^{k} \widetilde{L}_i = \sum_{i=1}^{k} \sigma^* L_i - \sum_{\substack{p\in L\\ r_p\geqslant m}} r_p E_p. \end{aligned} \qquad \text{(z [\textbf{Ha}, V.3.6])}$$

Natomiast [**Ha**, V.3.2] daje nam

$$\begin{aligned} &E_p.E_q = -\delta^q_p,\\ &\sigma^* K_{\mathbb{P}^2}.E_p = \sigma^* L_i.E_p = 0,\\ &\sigma^* K_{\mathbb{P}^2}.\sigma^* L_i = K_{\mathbb{P}^2}.L_i = -3,\\ &\sigma^* L_i.\sigma^* L_j = L_i.L_j = 1,\\ &(\sigma^* K_{\mathbb{P}^2} + a\sigma^* L)^2 = (K_{\mathbb{P}^2} + aL)^2. \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia 2.3. Zacznijmy od zauważenia, że nierówność (2.3) jest mocniejsza od (2.3 n). Dokładniej, współczynniki przy odpowiednich t_r są w (2.3) większe od tych w (2.3 n), a wszystkie są nieujemne.

Niech m będzie taką liczbą naturalną, że istnieje punkt p krotności $r_p = k - m + 1$, oraz $t_r = 0$ dla $r > k - m + 1$. Oczywiście $m \geqslant n$. Będziemy stosować nierówność Bogomolova-Miyaoki-Yau (0.4) dla pary $(\widehat{\mathbb{P}}^2_m, D = a\widetilde{L} + \sum b_{r_p} E_p)$. Najpierw sprawdzimy, że spełnione są założenia, czyli, że pewna krotność dywizora $K_{\widehat{\mathbb{P}}^2_m} + D$ jest efektywna. Wiemy, że

$$\begin{aligned} K_{\widehat{\mathbb{P}}^2_m} + D &= \sigma^* K_{\mathbb{P}^2} + \sum_{\substack{p\in L\\ r_p\geqslant m}} E_p + a\sum \widetilde{L}_i + \sum_{\substack{p\in L\\ r_p\geqslant m}} b_{r_p} E_p\\ &= \sigma^* K_{\mathbb{P}^2} + \sum a\widetilde{L}_i + \sum_{\substack{p\in L\\ r_p\geqslant m}} (1 + b_r) E_p. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Przedstawimy $\sigma^* K_{\mathbb{P}^2}$ przy pomocy $\widetilde{L}_i$ i E_p. Wiemy, że $K_{\mathbb{P}^2} = -3H$, gdzie H oznacza klasę hiperpłaskiego cięcia. H jest generatorem $\mathrm{Weil}\,\mathbb{P}^2$ i $L_i = H$. "=" oznacza równość w $\mathrm{Weil}\,\mathbb{P}^2$. Niech p będzie punktem maksymalnej krotności (tj. $r_p = k - m + 1$). Możemy założyć, że $r_p > 2m - 2$. Istotnie, jeśli $r_p \leqslant 2m - 2$, to układ spełnia założenie lematu 2.2 i prawdziwa jest nierówność (2.3), a co za tym idzie, nierówność (2.3 n). Linii nie przechodzących przez p jest dokładnie $m - 1$. Bez straty ogólności możemy założyć, że są to linie $L_1, L_2, \ldots, L_{m-1}$. Spośród linii przechodzących przez p wybierzmy $m+2$, powiedzmy $L_m, \ldots, L_{2m+1}$. Zauważmy, że możemy to zrobić, ponieważ $r_p \geqslant 2m - 1 \geqslant m + 2$. Zapiszmy teraz $3H$ jako $\sum_{i=1}^{k} d_i L_i$, gdzie

$$d_i = \begin{cases} d & \text{dla} \quad 1 \leqslant i \leqslant m-1, \\ d_p & \text{dla} \quad m \leqslant i \leqslant 2m+1, \\ 0 & \text{dla} \quad i > 2m+1. \end{cases}$$

Teraz dostajemy, że

$$\begin{aligned} \sigma^* K_{\mathbb{P}^2} = \sigma^*(-3H) &= \sigma^* \left(-\sum_{i=1}^{k} d_i L_i \right) \\ &= -\sum_{i=1}^{k} d_i \sigma^* L_i \\ &= -\sum_{i=1}^{k} d_i \widetilde{L}_i - \sum_{\substack{q \in L \\ r_q \geqslant m}} \beta_q E_q, \end{aligned}$$

gdzie $\beta_q = \sum_{L_i \ni q} d_i$. Podstawiając to do (2.4) otrzymujemy następującą równość:

$$K_{\widehat{\mathbb{P}}^2_m} + D = \sum_{i=1}^{k} (a - d_i) \widetilde{L}_i + \sum_{\substack{q \in L \\ r_q \geqslant m}} (1 + b_{r_q} - \beta_q) E_q.$$

Jeśli dobierzemy a, b_r, oraz d_i tak aby współczynniki przy $\widetilde{L}_i$ i E_q były nieujemne, to pewna krotność $K_{\widehat{\mathbb{P}}^2_m} + D$ będzie efektywna. Wystarczy, że dobierzemy je tak żeby spełnione były następujące nierówności:

- $d \leqslant a$ oraz $d_p \leqslant a$,
- $1 + b_{k-m+1} \geqslant \beta_p = (m+2) d_p$,
- $1 + b_m \geqslant (m-1) d + d_p$.

Pozostaje sprawdzić, że para $(\widehat{\mathbb{P}}^2_m, D)$ jest log kanoniczna. W tym celu przyjrzyjmy się zbiorowi $\mathrm{Sing}(X, D)$ osobliwości pary (X, D). Ponieważ rozdmuchanie gładkiej powierzchni w punkcie jest dalej powierzchnią gładką, więc $\mathrm{Sing}(X, D) = \mathrm{Sing}(D)$. Wszystkie osobliwości dywizora D są punktami przecięcia pewnej liczby linii, czyli są zwyczajne. Twierdzenie 0.2 pozwoli nam obliczyć (oszacować) lokalne orbifoldowe charakterystyki Eulera dla tych punktów, oraz zapewni log kanoniczność odpowiedniej pary. Mamy dwa rodzaje punktów podwójnych

- przeciwobrazy przy σ punktów podwójnych krzywej L. takich punktów jest t_2, a dla każdego z nich

$$e_{orb}(*; \widehat{\mathbb{P}}^2_m, D) = e_{orb}(0; \mathbb{C}^2, aL'_1 + aL'_2) = (1 - a)^2;$$

- dla każdego punktu p takiego, że $r_p \geqslant m$ mamy p punktów przecięcia krzywej wyjątkowej E_p z $\widetilde{L}_{i_1}, \ldots, \widetilde{L}_{i_p}$. Dla ustalonego r mamy rt_r punktów z

$$e_{orb}(*; \widehat{\mathbb{P}}^2_m, D) = e_{orb}(0; \mathbb{C}^2, aL'_1 + b_r L'_2) = (1-a)(1-b_r);$$

L'_1 i L'_2 oznaczały tutaj dwie różne proste w $\mathbb{C}^2$ przechodzące przez 0. Z twierdzenia 0.2 wynika również, że osobliwości te są log kanoniczne. Oprócz tego dla każdego $3 \leqslant r < m$ mamy t_r punktów r-krotnych, są one przeciwobrazami punktów r-krotnych krzywej L. Dla ustalonego r przy oznaczeniach twierdzenia 0.2 mamy $a_1 = \ldots = a_r = a$, $\alpha = ra$ oraz

$$e_{orb}(*; \widehat{\mathbb{P}}^2_m, D) = e_{orb}(0; \mathbb{C}^2, \sum_{i=1}^{r} aL'_i).$$

Jeśli założymy, że $a \leqslant \frac{2}{r}$ to mamy przypadek log kanoniczny i

$$e_{orb}(*; \widehat{\mathbb{P}}^2_m, D) \leqslant \left(1 - \frac{ra}{2}\right)^2.$$

Policzmy obie strony nierówności (0.4). Do policzenia $e_{orb}(\widehat{\mathbb{P}}^2_m, D)$ potrzebujemy jeszcze $e_{top}(\widehat{\mathbb{P}}^2_m)$, $e_{top}(\widetilde{L}_i - \mathrm{Sing}D)$ i $e_{top}(E_p - \mathrm{Sing}D)$. Ogólnie, jeśli $X = A \cup B$ to $e_{top}(X) = e_{top}(A) + e_{top}(B) - e_{top}(A \cap B)$. Z tego faktu wynika, że dla $A \subset X$ mamy $e_{top}(X - A) = e_{top}(X) - e_{top}(A)$, a jeśli $\widetilde{X}$ jest rozdmuchaniem X w jednym punkcie to $e_{top}(\widetilde{X}) = e_{top}(X) - 1 + e_{top}(E)$, gdzie E jest dywizorem wyjątkowym. W naszym przypadku E_p są izomorficzne z $\mathbb{P}^1$, tak więc $e_{top}(E_p) = 2$. Jeśli przez T oznaczymy liczbę punktów rozdmuchanych, to $T = \sum_{r \geqslant m} t_r$ i

$$\begin{aligned} e_{top}(\widehat{\mathbb{P}}^2_m) &= e_{top}(\mathbb{P}^2) + (e_{top}(\mathbb{P}^1) - 1)T \\ &= 3 + R \\ &= 3 + \sum_{r \geqslant m} t_r, \\ e_{top}(E_p - \mathrm{Sing}D) &= e_{top}(E_p) - e_{top}(\mathrm{Sing}D \cap E_p) \\ &= 2 - \#(\mathrm{Sing}D \cap E_p) \\ &= 2 - r_p. \end{aligned}$$

Ponieważ σ jest izomorfizmem $(\widehat{\mathbb{P}}^2_m - \bigcup E_p)$ na $(\mathbb{P}^2 - \{p : r_p \geqslant m\})$, więc $\widetilde{L}_i - \mathrm{Sing}D \cong L_i - \mathrm{Sing}L$. Stąd i z faktu, że $L_i \cong \mathbb{P}^1$ dostajemy

$$\begin{aligned} e_{top}(\widetilde{L}_i - \mathrm{Sing}D) &= e_{top}(L_i - \mathrm{Sing}L) \\ &= e_{top}(L_i) - e_{top}(\mathrm{Sing}L \cap L_i) \\ &= 2 - \#(\mathrm{Sing}L \cap L_i) \\ &= 2 - \#\{p : p \in L_i, r_p \geqslant 2\}. \end{aligned}$$

Natomiast

$$\begin{aligned}(K_{\widehat{\mathbb{P}}^2_m}+D)^2 &= (\sigma^*K_{\mathbb{P}^2}+\sum_{\substack{p\in L\\ r_p\geqslant m}}E_p+a\sum_{i=1}^{k}\sigma^*L_i-a\sum_{\substack{p\in L\\ r_p\geqslant m}}r_pE_p+\sum_{\substack{p\in L\\ r_p\geqslant m}}b_{r_p}E_p)^2\\ &= (\sigma^*K_{\mathbb{P}^2}+a\sum_{i=1}^{k}\sigma^*L_i+\sum_{\substack{p\in L\\ r_p\geqslant m}}(1-ar_p+b_{r_p})E_p)^2\\ &= (\sigma^*K_{\mathbb{P}^2}+a\sigma^*L)^2+(\sum_{\substack{p\in L\\ r_p\geqslant m}}(1-ar_p+b_{r_p})E_p)^2\\ &= (ak-3)^2-\sum_{\substack{p\in L\\ r_p\geqslant m}}(1-ar_p+b_{r_p})^2\\ &= (ak-3)^2-\sum_{r\geqslant m}t_r(1+b_r-ar)^2.\end{aligned}$$

Jeśli, korzystając z wcześniejszych wyliczeń, wypiszemy nierówność (0.4), to dostaniemy

$$\begin{aligned}(K_{\widehat{\mathbb{P}}^2_m}+D)^2 \leqslant 3\Big(e_{top}(\widehat{\mathbb{P}}^2_m)-\sum_{i=1}^{k}ae_{top}(\widetilde{L}_i-\mathrm{Sing}D)-\sum_{\substack{p\in L_i\\ r_p\geqslant m}}b_{r_p}e_{top}(E_p-\mathrm{Sing}D)\\ +\sum_{q\in\mathrm{Sing}D}(e_{orb}(q;\widehat{\mathbb{P}}^2_m,D)-1)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ak-3)^2-\sum_{r\geqslant m}t_r(1+b_r-ar)^2 \leqslant 9+3\sum_{r\geqslant m}t_r-3\sum_{i=1}^{k}a(2-\#\{p:p\in L_i,r_p\geqslant 2\})\\ -3\sum_{r\geqslant m}b_rt_r(2-r)+3\sum_{r\geqslant m}rt_r((1-a)(1-b_r)-1)\\ +3t_2((1-a)^2-1)+3\sum_{r=3}^{m-1}t_r((1-\frac{ar}{2})^2-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2k^2-6ak+9 \leqslant 9-6ak+3a\sum_{r\geqslant 2}rt_r+3\sum_{r=2}^{m-1}t_r((1-\frac{ar}{2})^2-1)\\ +\sum_{r\geqslant m}t_r(3+(1+b_r-ar)^2+3r(1-a)(1-b_r)-3r-3b_r(2-r))\end{aligned}$$

Teraz skorzystamy z równości (2.1)

$$a^2k+a^2\sum_{r\geqslant 2}t_r(r-1)r \leqslant 3\sum_{r=2}^{m-1}a^2t_r\frac{r^2}{4}+\sum_{r\geqslant m}t_r(4-4b_r+b_r^2+rab_r+a^2r^2-2ar)$$

$$a^2k \leqslant \sum_{r=2}^{m-1}a^2t_r\left(r-\frac{r^2}{4}\right)+\sum_{r\geqslant m}t_r((2-b_r)^2+rab_r+a^2r-2ar).$$

Podstawiając do tej ostatniej nierówności $a=\frac{1}{\alpha}$ dostajemy

$$k \leqslant \sum_{r=2}^{m-1}t_r\left(r-\frac{r^2}{4}\right)+\sum_{r\geqslant m}t_r(\alpha^2(2-b_r)^2-r\alpha(2-b_r)+r). \tag{2.5}$$

Połóżmy

$$a = \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{n},$$

$$b_r = \begin{cases} 2 - \frac{r}{n} & \text{dla} \quad m \leqslant r < \min\{2n,\, k-n\}, \\ 0 & \text{dla} \quad \min\{2n,\, k-n\} \leqslant r \leqslant k-n, \\ \frac{2}{n} & \text{dla} \quad r \geqslant k-n+1. \end{cases}$$

Wówczas, aby zapewnić efektywność pewnej krotności $K_{\widehat{\mathbb{P}^2_m}} + D$, wystarczy wziąć $d = \frac{2}{m}$ i $d_p = \frac{1}{m}$ i nasz układ spełnia nierówność

$$t_2 + \frac{3}{4}t_3 \geqslant k + \sum_{r=4}^{s-1}\left(\frac{r^2}{4} - r\right)t_r + \sum_{r=s}^{k-n}((n-1)r - n^2)t_r + \sum_{r>k-n}((n-2)r - (n-1)^2)t_r,$$

□

Uwaga. Może się zdarzyć, że $m \geqslant 2n$, jednak nie zmienia to naszej nierówności. Wówczas bierzemy

$$b_r = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad m \leqslant r \leqslant k-n \\ \frac{2}{n} & \text{dla} \quad r \geqslant k-n+1 \end{cases}$$

Twierdzenie 2.3 dla $n = 3$ daje nam, przy założeniach twierdzenia 2.1, nierówność lepszą od (2.2), mianowicie

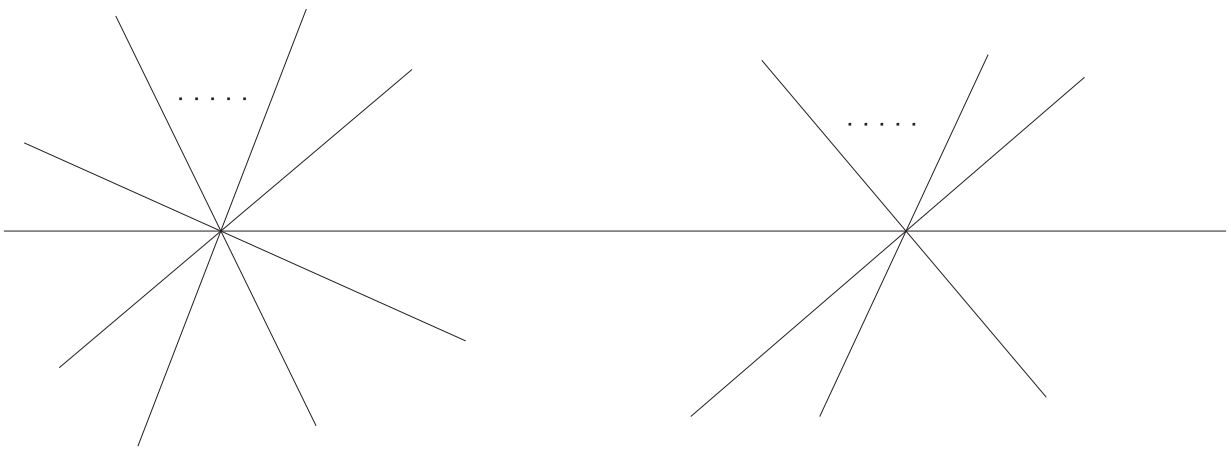
$$t_2 + \frac{3}{4}t_3 \geqslant k + \sum_{r=5}^{s-1}\left(\frac{r^2}{4} - r\right)t_r + \sum_{r=s}^{k-4}(3r-16)t_r + \sum_{r>k-4}(2r-9)t_r,$$

gdzie $s = \min\{8,\ k-4\}$.

W [**Hi2**] F. Hirzebruch podał przykład układu 8 linii takiego, że $t_2 = 10,\ t_3 = 1,\ t_6 = 1$, a co za tym idzie nie spełnia nierówności (2.2). Układ ten, co łatwo sprawdzić, nie spełnia też powyższej nierówności. Spełnia natomiast założenia, a więc i tezę twierdzenia 2.3 dla $n = 3$.

Dla dowolnego n można skonstruować układ spełniający nierówność (2.3 n), ale nie spełniający nierówności (2.3 n+1).

Przykład. Dla ustalonego $n \geqslant 6$ rozpatrzmy następujący rzeczywisty układ.



W jednym z pęków mamy $k-n+1$ linii, w drugim $n-1$, oraz mamy linię w nieskończoności.

$$\begin{aligned} t_2 &= k-1+(k-n)(n-2) = kn+2n-k-n^2-1 \\ t_{n-1} &= 1 \\ t_{k-n+1} &= 1 \end{aligned}$$

Oczywiście układ ten spełnia nierówność (2.3 n), ale nie musi spełniać (2.3 n+1). Istotnie, podstawmy takie t_r do nierówności (2.3 n+1), jeśli weźmiemy $k > 3n$, to mamy

$$\begin{gathered} kn+2n-k-n^2-1 \geqslant k+\frac{(n-1)^2}{4}-n+1+(n-1)(k-n+1)-n^2 \\ kn+2n-k-n^2-1 \geqslant nk+\frac{1}{2}n-\frac{7}{4}n^2-\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4}n^2+\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}-k \geqslant 0. \end{gathered}$$

Jeśli weźmiemy k wystarczająco duże w stosunku do n, to powyższa nierówność nie będzie prawdziwa.

Na koniec tej części podamy przykład pokazujący, że rozważane nierówności nie są prawdziwe dla układów linii zdefiniowanych nad algebraicznie domkniętym ciałem dodatniej charakterystyki.

Przykład. Niech $\overline{\mathbb{F}}_p$ oznacza algebraiczne domknięcie ciała $\mathbb{F}_p$. Rozpatrzmy zbiór wszystkich linii w $\mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{F}}_p)$, które mają współczynniki z ciała $\mathbb{F}_p$. Zbiór ten tworzy układ (p^2+p+1) linii taki, że

$$t_r = \begin{cases} p^2+p+1 & \text{dla } r = p+1 \\ 0 & \text{dla } r \neq p+1 \end{cases}$$

(zobacz [**Mi3**, Example 3.2.2]). Układ ten spełnia najmocniejsze założenia, mianowicie założenia lematu 2.2, ale nie spełnia żadnej z udowodnionych nierówności.

3. Układy stożkowych na $\mathbb{P}^2$

Układem k stożkowych na $\mathbb{P}^2$ będziemy nazywali krzywą rozkładalną $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_k$, gdzie C_i są różnymi gładkimi stożkowymi, a C ma tylko osobliwości typu A_1 i A_3. Przez t oznaczmy liczbe osobliwości typu A_3, a przez n typu A_1. W literaturze (np. [**Hi2**]) można znaleźć oszacowanie na liczbę t

$$t \leqslant \frac{4}{9}k^2 + \frac{4}{3}k.$$

W innej pracy [**MS**] G. Megyesi poprawił to szacowanie dla $k = 8, 9, 12$ i $k \geqslant 15$. W tym celu wykorzystał on wersję nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau dla normalnych powierzchni z brzegiem ułamkowym udowodnioną w [**Me**]. W [**MS**] udowodnił on też następujące

Twierdzenie 3.1 *Niech R i S będą dwoma rozłącznymi zbiorami, odpowiednio r i s, stożkowych na $\mathbb{P}^2$. Załóżmy, że suma stożkowych z obu zbiorów ma jedynie osobliwości typów A_3 i A_1. Załóżmy, że każda stożkowa z R jest styczna do każdej stożkowej z S w dwóch punktach, czyli ich suma ma dwie osobliwości typu A_3. Jeśli suma stożkowych ze zbioru S ma tylko osobliwości typu A_1 to $r \leqslant 7$ lub $s \leqslant 9$.*

Jako wniosek G. Megyesi pokazał, że w żadnym układzie stożkowych nie ma dwóch różnych rodzin, każda po dziesięć stożkowych, takich, że każda stożkowa z jednej rodziny jest styczna w dwóch punktach do każdej stożkowej z drugiej rodziny. Wykorzystując wersję A. Langera nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau poprawimy ten wynik. W tym celu podamy pewne szacowanie na liczbę osobliwości typu A_3 w układzie k stożkowych.

Stwierdzenie 3.2 *Niech $C = C_1 + \ldots + C_k$ będzie układem stożkowych. Wówczas dla dowolnej liczby $\alpha \in \left(\frac{3}{2k}, \frac{3}{4}\right)$ mamy następującą nierówność na liczbę t osobliwości typu A_3:*

$$t \leqslant \frac{2\alpha^2}{1 + 2\alpha^2 - 2\alpha - e_{orb}(\alpha, k)}k^2 + \frac{6(\alpha - \alpha^2)}{1 + 2\alpha^2 - 2\alpha - e_{orb}(\alpha, k)}k, \tag{3.1}$$

gdzie

$$e_{orb}(\alpha, k) = \begin{cases} 1 - 2\alpha, & \text{jeśli} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{4}, \\ \frac{(3-4\alpha)^2}{4(k+1)}, & \text{jeśli} \quad \frac{1}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Dowód. Stosujemy nierówność (1.2). Krzywa C ma stopień $2k$, stąd dolne ograniczenie na α. Możemy brać $\alpha \leqslant \frac{3}{4}$ ponieważ C ma tylko osobliwości typu A_3 i A_1, a taki współczynnik zapewnia ich log kanoniczność (patrz tabela 1). e_{orb} to oczywiście lokalna orbifoldowa charakterystyka Eulera dla osobliwości typu A_3. Jeśli układ ma t osobliwości typu A_3, to ma on $n = 2k(k-1) - 2t$ osobliwości typu A_1. Podstawiając do (1.2) i przekształcając dostajemy żądane szacowanie.

□

Jeśli teraz weźmiemy $k = 15$ i $\alpha = \frac{41}{120}$, dostaniemy, że $t \leqslant 111$. W szczególności prawdziwy jest

Wniosek 3.3 *Żaden układ stożkowych na $\mathbb{P}^2$ nie zawiera dwóch rozłącznych rodzin R i S, takich, że R ma 7 a S ma 8 elementów, a każda stożkowa z R jest styczna do każdej stożkowej z S w dwóch punktach.*

Uwaga. Istnieją takie dwie rodziny R i S, każda po 7 elementów, że każda stożkowa z R jest styczna do każdej stożkowej z S. Przykład znajduje się w [**Hi2**].

Bibliografia

[**Bo**] F. A. Bogomolov, *„Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties"*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), 1227–1287.

[**BK**] E. Brieskorn, H. Knörrer, *„Plane Algebraic Curves"*, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1986.

[**BPV**] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *„Compact complex surfaces"*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **4**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[**Ha**] R. Hartshorne, *„Algebraic Geometry"*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977.

[**Hi1**] F. Hirzebruch, *„Arrangements of lines and algebraic surfaces"*, Arithmetic and geometry, Vol. II, (eds. M. Artin and J. Tate), Progress in Mathematics **36**, Birkhäuser, Boston, Mass., 1983, pp. 113–140.

[**Hi2**] F. Hirzebruch, *„Singularities of algebraic surfaces and characteristic numbers"*, The Lefschetz centennial conference, Part I (Mexico City, 1984), Contemp. Math. **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 141–155.

[**K1**] R. Kobayashi, *„Uniformisation of complex surfaces"*, Kähler metrics and moduli spaces (ed. T. Ochiai), Advanced Studies in Pure Mathematics 18-II (Kinokuniya, Tokyo, and North-Holland, Amsterdam 1990), pp. 313-394.

[**K2**] R. Kobayashi, *„An Application of Kähler-Einstein Metrics to Singularities of Plane Curves"*, Kähler metrics and moduli spaces (ed. T. Ochiai), Advanced Studies in Pure Mathematics 18-I (Kinokuniya, Tokyo, and North-Holland, Amsterdam 1990), pp. 321-326.

[**Ko**] J. Kollár et al., *„Flips and abundance for algebraic threefolds"*, Asterisque **211** (1992).

[**La**] A. Langer, *„Logarithmic orbifold Euler numbers of surfaces with applications"*, Proc. London Math. Soc. (3) **86** (2003), 358–396.

[**Me**] G. Megyesi, *„Generalisation of the Bogomolov–Miyaoka–Yau inequality to singular surfaces"*, Proc. London Math. Soc. (3) **78** (1999), 241–282.

[**MS**] G. Megyesi, E. Szabó, *„On the tacnodes of configurations of conics in the projective plane"*, Math. Ann. **305** (1996), 693-703.

[**Mi1**] Y. Miyaoka, *„On the Chern numbers of surfaces of general type"*, Invent. math. **42** (1977), 225-237.

[**Mi2**] Y. Miyaoka, *„The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants"*, Math. Ann. **268** (1984), 159-171.

[**Mi3**] Y. Miyaoka, *„Theme and variations -Inequalities between Chern numbers-"*, Sugaku Expositions **4**, (1991) 157-176.

[**Sa1**] F. Sakai, *„Semi-stable curves on algebraic surfaces and logarithmic pluri-canonical maps"*, Math. Ann. **254** (1980), 89-120.

[**Sa2**] F. Sakai, *„Weil divisors on normal surfaces"*, Duke Math. J. **51** (1984), 877–887.

[**Ya**] S.T. Yau, *„Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry"*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **74** (1977), 1798-1799.