KOHOMOLOGIE PRZESTRZENI, BĘDĄCYCH SUMĄ SKOŃCZONEJ ILOŚCI ORBIT

Andrzej Weber

1 Rozmaitości symplicjalne związane z działaniem grupy. Cały czas G jest spójną grupą liniową. Przestrzeń klasyfikującą jako rozmaitość symplicjalną rozwarzał już [Deligne '74]

$$BG_\bullet = pt \;\begin{array}{l}\longleftarrow\\ \longleftarrow\end{array} G \;\begin{array}{l}\longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow\end{array}\; G\times G \;\cdots$$

(strzałki są mnożeniem lub zapominaniem skrajnego elementu).

Uwaga na marginesie. Dana G-wiązka główna na X sklejona za pomocą pewnego kocyklu danego na pokryciu $\mathcal{U}$. Kocykl zadaje przekształcenie z nerwu pokrycia $N\mathcal{U}_\bullet$ do $BG_\bullet$. Relacja kobrzegu zadaje homotopię $N\mathcal{U}_\bullet \times \Delta^1 \to BG_\bullet$. Ponadto włókna rzutowania $N\mathcal{U}_\bullet$ na X są przestrzeniami afinicznymi. W odpowiednio zlokalizowanej kategorii morfizmy $Mor_{Ho}(X, BG_\bullet)$ są w bijekcji z klasami izomorfizmu G-wiązek, które są Zariski-lokalnie trywialne.

Uwaga. Warto porównać symplicjalne $BG_\bullet$ z BG_{Tot} [Totaro '98], reprezentującym wiązki lokalnie étalnie trywialne.

Stwierdzenie. $B\mathbf{C}^*_\bullet \simeq \mathbf{P}^\infty (= B\mathbf{C}^*_{Tot})$ *jeśli można odwracać morfizmy, których włókna są przestrzeniami afinicznymi.*

Konstrukcja Borela to

$$[X/G]_\bullet = (EG\times X)_\bullet = X \;\begin{array}{l}\longleftarrow\\ \longleftarrow\end{array} X\times G \;\begin{array}{l}\longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow\end{array}\; X\times G\times G \;\cdots$$

(strzałki są działamiem, mnożeniem lub zapominaniem skrajnego prawego elementu). Oczywiście $[pt/G]_\bullet = BG_\bullet$.

2 Filtracja wagowa w kohomologiach (o współczynnikach w $\mathbf{Q}$ lub w $\mathbf{C}$) [Deligne '72]. Niech X będzie gładką rozmaitością algebraiczną. Istnieje filtracja

$$0 = W_{k-1}H^kX \subset W_kH^kX \subset W_{k+1}H^kX \subset \ldots \subset W_{2k}H^kX = H^kX$$

spełniająca:
– $W_kH^kX = H^kX$ jeśli X jest zupełna (mówimy, że kohomologie są czyste).
– Niech $f : X \to Y$ będzie morfizmem algebraicznym. Morfizm indukowany ściśle zachowuje filtrację: $f^*W_lH^kY = W_lH^kX \cap f^*H^kY$.
– Filtracja jest ściśle zachowana przez ciąg Gysina (lokalizacyjny) gdy $i : Y \hookrightarrow X$ jest dywizorem, $j : U = X \setminus Y \hookrightarrow X$

$$\longrightarrow H^kX \xrightarrow{j^*} H^kU \xrightarrow{res} H^{k-1}Y \xrightarrow{i_!} H^{k+1}X \longrightarrow ,$$

przy czym res zmniejsza wagę o 2, a $i_!$ zwiększa o 2. Stąd, gdy X jest zupełna $W_kH^kU = im(j^*) = ker(res)$, $W_{k+1}H^kU = H^kU$.
– Filtracja wagowa jest też zdefiniowana dla rozmaitości symplicjalnych, lecz wtedy w $H^k(X_\bullet)$ mogą się pojawiać wagi mniejsze od k.

3 Filtracja wagowa w $H^*(BG_\bullet)$ i w $H^*(G)$ [Deligne].

Twierdzenie. *Kohomologie $BG_\bullet$ są czyste, tzn.*

$$W_{k-1}H^k(BG_\bullet) = 0\,, \qquad W_kH^k(BG_\bullet) = H^k(BG_\bullet)\,.$$

Niech $P^\bullet = P^1 \oplus P^3 \oplus P^5 \oplus \ldots$ będą prymitywnymi generatorami $H^*G = \Lambda P^\bullet$.

Twierdzenie. *Dla $k > 0$ $W_kH^kG = 0$ oraz $W_{k+1}H^kG = P^k$ (lub 0 jeśli k jest parzyste).*

4 Kohomologie przestrzeni ze skończoną ilością orbit [M. Franz+AW]

Twierdzenie A. *Jeśli X jest gładkie i ma skończoną ilość orbit, to $H^*([X/G]_\bullet)$ jest czyste.*

$$H^*([X/G]_\bullet) = \bigoplus H^{*+2c}(BH)$$

(sumujemy po orbitach $G/H \subset X$, $c = dim\, H$).

Struktura multiplikatywna $H^*([X/G]_\bullet)$ nie jest łatwa.

Twierdzenie B. *Jeśli $H^*([X/G]_\bullet)$ jest czyste, to*

$$H^nX = \bigoplus_{q-p=n} (Tor_p^{H^*(BG_\bullet)}(H^*([X/G]_\bullet), \mathbf{C}))^q\,.$$

Suma składników z $q \leq l$ jest równa $W_lH^*(X)$.

Jeśli rozmaitość X jest osobliwa, to H^* należy zastąpić przez kohomologie przecięć Goresky'ego-MacPhersona. Twierdzenie A jest prawdziwe conajmniej dla rozmaitości sferycznych, a Twierdzenie B zawsze.